

О. Зенкевич,
И. Чанг

МЕТОД
КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ
В ТЕОРИИ
СООРУЖЕНИЙ
И В МЕХАНИКЕ
СПЛОШНЫХ СРЕД

Перевод с английского О. П. Троицкого и
С. В. Соловьева

*Под редакцией докт. техн. наук
Ю. К. Зарецкого*



МОСКВА «НЕДРА» 1974

Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. Нью-Йорк, 1967. Пер. с англ. А. П. Тронцкого и С. В. Соловьёва под ред. докт. техн. наук Ю. К. Зарецкого. М., «Недра», 1974, 240 с.

В книге описан метод конечных элементов применительно к расчету инженерных конструкций и задачам механики сплошной среды. Сформулированы вариационные принципы и энергетический подход для вывода зависимостей метода, а также предложены критерии сходимости решения и границы применения метода. Приведен материал об использовании метода конечных элементов применительно к теории упругости, геомеханике грунтов, фильтрации, упругопластическим и упруговязким задачам, а также задачам нелинейной теории упругости и динамики. На примерах показано, что в отличие от аналитических методов метод конечных элементов позволяет значительно приблизить расчетную схему к реальному объекту.

Для решения нелинейных задач с использованием метода конечных элементов предложено использовать метод шагов. Описана последовательность итерационного процесса при решении упругопластических задач. Метод конечных элементов распространен для решения задач с учетом эффекта ползучести. Приведены практические задачи и даны рекомендации по составлению универсальных программ для ЭЦВМ.

Книга предназначена для широкого круга инженерно-технических работников, занимающихся расчетами инженерных конструкций, гидротехнических и подземных сооружений.

Табл. 10, ил. 108, список лит. — 52 назв.

ОТ РЕДАКТОРА

Для решения наиболее сложных задач механики сплошной среды, строительной механики, теории теплопроводности и фильтрации используются различного рода численные реализации алгоритмов решения. К числу, по-видимому, наиболее эффективных методов, получивших за последнее время широкое распространение, относится метод конечных элементов (МКЭ). Идея метода конечных элементов заключается в приближенном решении вариационной формулировки проблемы, на основе которой строится связь «сила — перемещение» для каждого элемента из совокупности конечного числа элементов, на которую разбивается изучаемая область сплошной среды. Дискретизация сплошной среды в виде элементов, связанных конечным числом узловых связей, позволяет сохранить свойства среды при определении напряженно-деформированного состояния каждого элемента. Наличие конечного числа узловых связей дает возможность ввести соотношения между силами, приложенными к узловым точкам, и вызываемыми ими перемещениями. Это соотношение представляется матрицей жесткости элемента. В отличие от метода конечных разностей аппроксимация, положенная в основу метода конечных элементов, имеет явно выраженную физическую природу. Последнее дает возможность для широкого обобщения и позволяет вести прямой контроль за поведением конструкции в процессе счета.

Известные преимущества перед другими численными методами и широчайшая область применения МКЭ вызвали большой интерес к его использованию для решения различных задач. Необходимость сбора и систематизации публикуемого материала стала очевидной. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, в частности, осуществил реферативный обзор зарубежной литературы за период 1966—1972 г.

В советской литературе имеется достаточно много публикаций, относящихся к применению этого метода. Однако работы обобщающего характера по изложению метода конечных элементов к решению задач теории сооружений и механики сплошной среды до последнего времени не было.

Монография О. Зенкевича и И. Чанга, переведенная на русский язык, займет особое место в нашей литературе, посвященной численным методам решения задач механики сплошной среды. В монографии в общедоступной форме приводятся идеи построения общей теории МКЭ и последовательно излагается его применение в задачах теории упругости, вязко-упругости, пластичности, нелинейной упругости, устойчивости и колебаний пластин и оболочек и т. д.

На конкретных примерах показывается, что в отличие от аналитических методов, в которых приходится прибегать к идеализации свойств среды и схематизации геометрических форм сооружений, метод конечных элементов позволяет значительно приблизить расчетную схему к реальному объекту. Метод дает возможность учесть реальные свойства среды, такие как анизотропия и слоистость, наличие ослабленных областей, трещин, а также учесть реальную геометрию сооружений.

Для решения нелинейных задач с использованием метода конечных элементов предлагается использовать «пошаговый» метод. Описывается последовательность итерационного процесса при решении упругопластических задач. Метод конечных элементов распространен для решения задач с учетом эффекта ползучести.

Главы XIV и XV, посвященные перспективам дальнейшего развития МКЭ и рекомендациям по составлению вычислительных программ, в настоящей книге не переведены.

В 1971 г. вышла книга О. Зенкевича «Метод конечных элементов в строительной механике и механике сплошных сред». Последовательность изложения материала и основные теоретические положения сохранены такими же, как и в этом издании. Включены новые примеры применения МКЭ в инженерном деле, физике и других технических науках, большее внимание уделено формулированию нелинейных задач, дано описание ряда модульных программ.

Предлагаемый перевод первого издания книги О. Зенкевича и И. Чанга, несомненно, представит интерес для широкого круга специалистов, работающих в различных областях механики сплошной среды. Она будет полезна для инженеров-расчетчиков как руководство для овладения методом и практического его применения.

Докт. техн. наук Ю. К. Зарецкий.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный инженер встречается с большими трудностями при расчетах сооружений. Классическая математика, несмотря на все возрастающую точность методов, в состоянии решать задачи лишь при значительной их идеализации. Этот процесс настолько трудоемок, что отнимает у проектировщика много времени. Благодаря применению более мощных ЭВМ при одновременном снижении стоимости арифметических операций используют относительно простые численные методы, совершенствуя процесс расчета. Это же снижение стоимости позволяет проводить более точные расчеты вместо приближенных вычислений сомнительной обоснованности.

Метод, описанный в данной книге, позволяет подойти к решению задач, постановка которых ранее встречала значительные трудности. Дорогостоящие экспериментальные исследования, часто сейчас используемые при проектировании важных сооружений, скоро будут вытеснены расчетными методами. Это совершенствование системы расчета позволяет говорить об автоматизации оптимальных составляющих проектирования как о реальности. С другой стороны, совершенствуются такие новые вычислительные системы, как «Sketch pad», с помощью которых инженер будущего сможет наилучшим образом использовать свои технические и творческие возможности. Прежде чем приступить к вычислению на ЭВМ сложной реальной континуальной задачи, необходимо представить континуум так, чтобы бесконечное число степеней свободы, которым он обладает, стало бы конечным числом неизвестных, как бы велико оно не было. Такой процесс дискретизации был впервые успешно выполнен с помощью ныне хорошо известного метода конечных разностей. Сейчас становятся очевидными значительные преимущества другого метода — метода конечных элементов. Его относительно простая логика делает этот метод идеальным для ЭВМ.

Опубликовано много статей, иллюстрирующих применение этого метода. Однако ощущается необходимость дать его исчерпывающее описание с тем, чтобы проводимые операции были более понятны. Эта цель поставлена перед данной книгой. Так как в основе метода конечных элементов лежат концепции теории сооружений, то значительная часть материала, иллюстрирующего его применение, относится к этой области. Однако возможности этого метода позволяют применять его к решению разнообразных задач, в том числе задач теплопроводности, течения жидкости и т.д. Хотя книга предназначена в первую очередь для инженеров, авторы надеются, что она представит интерес для математиков, которые

смогут развить теорию метода конечных элементов одновременно с методом конечных разностей.

Основным условием являются элементарные знания дифференциального исчисления и матричной алгебры.

Для неподготовленного читателя краткий обзор основ матричной алгебры дан в приложении.

Глава I этой книги не имеет прямого отношения к конечным элементам. В ней суммируются основные принципы расчета жесткости в столь доступной форме, что нет необходимости обращаться к другим пособиям по теории сооружений. Стандартные приемы объединения конструктивных элементов должны всегда учитывать жесткость, как характеристику конечных элементов, независимо от того, используем ли мы эти приемы непосредственно в теории сооружений или для описания других явлений.

В главе II описывается применение метода конечных элементов к задачам теории упругости, основанным на предполагаемых схемах смещения. Тщательное изучение этой главы заключается в основе понимания метода, который в главах III—IX применяется при исследовании различных задач упругости.

При этом важно отметить следующее: во-первых, этот метод является общим и основывается на приближенном решении экстремальной задачи. Во-вторых, в противоположность широко известному методу Ритца в качестве переменных параметров взяты величины с очевидным физическим смыслом. Первое условие дает возможность расширить применение метода за пределы задач теории сооружений. Некоторые из таких случаев рассмотрены в главе X. Второе условие позволяет инженеру в процессе решения реальной задачи иметь в виду ее физическое содержание. Очевидно, метод конечных элементов в связи с его большим практическим значением находится в стадии эволюции. Поэтому ни одна книга подобного рода не может считаться совершенной. Авторы тем не менее надеются, что ценность книги останется неизменной, так как в ней дан обзор основных принципов, а также некоторые случаи непосредственного их применения. При написании книги авторы руководствовались принципом простоты изложения, поэтому она может быть полезна читателю, заинтересовавшемуся этим вопросом впервые, в той же мере, что и опытному специалисту, интересующемуся вопросом применения численного интегрирования вместо точного интегрирования и других технических деталей. При этом полезно знать основы языка фортран, хотя очевидно, что читатель должен быть и в курсе последних достижений в области программирования, где развитие идет очень быстро. Так как в основном данной книгой будут пользоваться инженеры, там где это возможно, приводятся примеры из практики.

Примеры приведены в основном из области деятельности, с которой знакомы авторы. Однако данные методы расчета применимы и в других отраслях техники.

1. Вступление

Стандартные инженерные сооружения могут быть рассмотрены как объединения конструктивных элементов, соединенных дискретным числом узлов. Если известно соотношение «сила — смещение» для отдельных элементов, то возможно, используя различные хорошо известные приемы расчета конструкций [1, 2], получить свойства и изучить поведение объединенной конструкции.

В упругом континууме истинное число связующих точек — бесконечность, и в этом заключаются наибольшие трудности численного решения. Понятие конечных элементов, введенное первоначально Тернером и другими [3], ставит цель преодолеть эти трудности, предполагая, что континуум разбит на элементы, соединенные только конечным числом узловых точек, к которым приложены некоторые фиктивные силы, представляющие напряжения, реально действующие на границах элемента. Если такая идеализация допустима, то проблема сводится к обычной задаче теории сооружений, хорошо поддающейся численному решению. При первом рассмотрении эта задача, даже обладая внешней привлекательностью постановки, все же не представляется достаточно корректной; в частности, остается открытым вопрос о характеристике «нагрузка — смещение» для элемента.

Задача последовательного определения этих характеристик будет рассмотрена подробно в главе II, где приводится обоснование этого метода. Однако на данном этапе важно представить изложение общего метода расчета сооружений, которым мы будем пользоваться после установления свойств элемента.

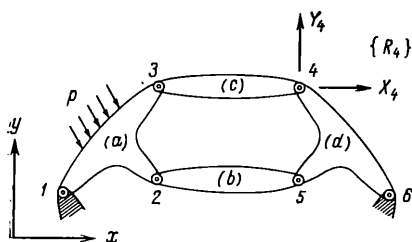
Будет показано, что метод конечных элементов применим ко многим задачам, не относящимся к теории сооружений. Даже в этом случае ценные свойства элемента имеют такое же выражение, какое они бы имели, если бы этот элемент являлся составной частью конструкции. Тогда процесс объединения и решения задачи становится аналогичным расчету конструкции и использует обычные методы теории сооружений.

2. Элемент конструкции

На рис. 1 показана двумерная конструкция, которая состоит из отдельных компонентов и соединена в узлах, пронумерованных от 1 до n . Узловые связи в этом случае представляют собой шарниры, не передающие момент. Предполагается, что характеристика каждого элемента получена либо в результате вычислений, либо с по-

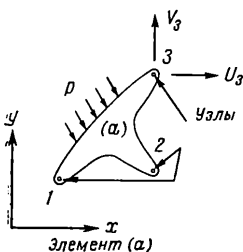
мощью эксперимента. Тогда, если рассмотреть типовой элемент a , соединенный в узлах 1, 2, 3, то силы, действующие в узлах, единственным образом определяются смещением этих узлов, распределенной нагрузкой p , действующей на этот элемент, и его начальной деформацией. Эта деформация может быть следствием температуры, усадки или просто неточности изготовления. Силы и вызываемые ими смещения выражаются соответствующими компонентами U, V и u, v в общей системе координат. Силы, действующие

в узлах (в данном случае три) элемента a , могут быть представлены в виде следующей матрицы:



$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}, \quad (I.1)$$

а вызываемые ими узловые смещения



$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (I.2)$$

Рис. 1. Конструкция, состоящая из элементов, соединенных в узлах

Допуская, что элемент ведет себя упруго, характеристическое соотношение будет всегда представлять собой

$$\{F\}^a = [k]^a \{\delta\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a, \quad (I.3)$$

где $\{F\}_p^a$ и $\{F\}_{\varepsilon 0}^a$ — узловые силы, необходимые для того, чтобы уравновесить соответственно любые распределенные нагрузки, действующие на элемент, и начальные деформации, которые могут явиться результатом изменения температуры в том случае, если узлы не допускают какого-либо перемещения. Первый член выражает силы, вызываемые смещением узлов. Таким же образом с помощью предварительного расчета или эксперимента можно найти выражение напряжений или внутренних реакций в любой заданной точке или точках элемента в функции узловых смещений. Выражая эти напряжения с помощью матрицы $\{\sigma\}^a$, получим соотношение

$$\{\sigma\}^a = [S]^a \{\delta\}^a + \{\sigma\}_p^a + \{\sigma\}_{\varepsilon 0}^a, \quad (I.4)$$

где последние два члена есть напряжение от распределенной по элементу нагрузки и, соответственно, первоначальные напряжения

в случае отсутствия узловых смещений. Матрица $[k]^a$ есть матрица жесткости элемента, а матрица $[S]^a$ есть матрица напряжения элемента. Соотношения (1.3) и (1.4) были показаны на примере элемента с тремя узлами и связующими точками, которые могут передавать только два компонента силы. Ясно, что те же аргументы и соотношения могут быть применимы в общем случае. Элемент b нашей гипотетической конструкции будет иметь только две связующие точки, другие элементы могут иметь большее число таких точек. Аналогично, если соединения представить как жесткие, то необходимо рассматривать три компонента обобщенной силы и обобщенного смещения, причем третьи компоненты обобщенной силы и обобщенного смещения являются соответственно моментом и вращением. Для жесткого соединения трехмерной конструкции число самостоятельных узловых компонент будет 6. В общем случае

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_m \end{Bmatrix} \text{ и } \{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \quad (1.5)$$

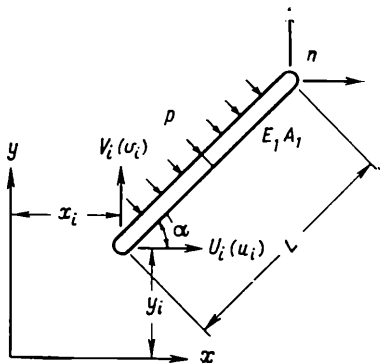


Рис. 2. Балка с шарнирами на концах

Причем каждому F_i и δ_i соответствует некоторое число компонент или степеней свободы. Матрицы жесткости элемента будут, очевидно, всегда квадратными и иметь форму

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где k_{ii}, \dots, k_{mm} — квадратная матрица размером $l \times l$ (l — число компонент сил, рассматриваемых в узлах).

В качестве примера двумерной задачи можно взять балку с шарнирами на концах постоянного сечения A и с модулем E , показанную на рис. 2. Балка испытывает деформацию от равномерно распределенной нагрузки и термоупругую деформацию расширения $\epsilon_0 = \alpha T$

Если концы балки имеют координаты x_i, y_i и x_n, y_n , то ее длина

$$L = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2},$$

а ее наклон к горизонтали

$$\alpha = \arctg \frac{y_n - y_i}{x_n - x_i}.$$

В узлах предполагаются только две компоненты силы и смещения.
Узловые силы от продольной нагрузки

$$\{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \cdot \frac{\rho L}{2}$$

и представлены через соответствующие компоненты реакции балки $\rho L/2$. Аналогично, чтобы ограничить тепловое расширение ε_0 , необходима осевая сила ($E\alpha TA$), которая имеет следующие компоненты:

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{Bmatrix} (E\alpha TA).$$

Окончательно смещение элемента

$$\{\delta\}^a = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

вызовет удлинение

$$(u_n - u_i) \cos \alpha + (v_n - v_i) \sin \alpha.$$

Если эту величину удлинения умножить на EA/L , то получим осевую силу, компоненты которой снова могут быть найдены подстановкой этой силы вместо $E\alpha TA$ в предыдущем уравнении. Преобразовав ее в обычную форму, получим

$$\begin{aligned} \{F\}_{\delta}^a &= \begin{Bmatrix} F_i \\ F_n \end{Bmatrix}_{\delta} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{\delta} = \\ &= \frac{EA}{L} \times \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = [k]^a \{\delta\}^a. \end{aligned}$$

Таким образом, мы вывели компоненты общего уравнения (I.3) для элементарного случая. Снова можно легко найти напряжения на любом участке элемента в виде соотношений (I.4). Например, если мы сосредоточим внимание на сечении C посередине балки, то напряжения в крайних волокнах, определяемые с помощью осевого растяжения элемента и изгибающего момента,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\}_C &= \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \{\delta\}^a + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\rho L^2}{8} \frac{d}{l} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} E\alpha T, \end{aligned}$$

где d — половина высоты сечения; I — момент инерции. Теперь можно легко узнать все члены уравнения (I.4).

Для более сложных элементов требуется более усложненная форма расчета, но результаты будут иметь тот же вид. Инженер сможет легко понять, что так называемый «угол поворота» (slope-deflection), используемый при расчетах жестких конструкций, есть просто частный случай общего соотношения. Можно заметить, что полная матрица жесткости, полученная для простого напряженного элемента, окажется симметричной (такими в самом деле и были все матрицы). Это не случайность, а результат закона сохранения энергии и его следствия — хорошо известной теоремы взаимности Максвелла — Бетти. Предполагалось, что свойства элемента следуют простым линейным соотношениям. В принципе подобные соотношения могут быть установлены для нелинейных материалов, но обсуждение этих задач нецелесообразно на этой стадии.

3. Объединение и расчет конструкции

Рассмотрим снова гипотетическую конструкцию на рис. 1. Чтобы получить полное решение, необходимо удовлетворить следующим двум условиям: совместности смещений и равновесию.

Любая система узловых смещений

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{array} \right\}, \quad (\text{I.7})$$

записанная для полной конструкции, в которой участвуют все элементы, автоматически удовлетворяет первому условию. Так как внутри элемента уже обеспечены условия полного равновесия, то необходимо установить условия равновесия для узлов конструкции. Результирующие уравнения содержат смещения как неизвестные. После того как эти неизвестные будут найдены, задача будет решена. Внутренние силы в элементах, или напряжения, могут быть

легко найдены с помощью характеристик, установленных «а priori» для каждого элемента по уравнению (I.4).

Предположим, что конструкция нагружена внешними силами

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}. \quad (I.8)$$

приложенными к узлам вместе с распределенными нагрузками, приложенными к отдельным элементам. Снова любая из сил R_i должна иметь то же число компонентов, как и предполагаемое число реакций элемента. В рассматриваемом примере

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}. \quad (I.9)$$

Хотя узлы предполагались шарнирными, но на этой стадии сохраняется общность для произвольного числа компонентов.

При составлении условия равновесия для i -го узла необходимо помнить, что каждая компонента R_i должна в свою очередь быть равной сумме компонент сил, даваемых элементами, которые встречаются в узле.

Таким образом, рассматривая все компоненты силы, имеем

$$\{R_i\} = \Sigma \{F_i\}. \quad (I.10)$$

Здесь суммирование ведется по всем элементам. Вводя характеристики элемента, даваемые уравнением (I.3), и рассматривая только соответствующие силы F_i с помощью матриц уравнения (I.6), вышеуказанное уравнение (I.10) принимает вид

$$\{R_i\} = \sum_{m=1}^{m=n} \Sigma [k_{.m}]^a \{\delta_m\} + \Sigma \{F_i\}_p^a + \Sigma \{F_i\}_{e0}^a. \quad I.11$$

Внутреннее суммирование теперь производится по всем элементам конструкции. Если какой-нибудь элемент фактически не содержит рассматриваемого узла, то он не содержит и подматрицы с индексом i , и поэтому его вклад будет равен нулю. При составлении расчетных схем для ручного или машинного счета этот факт представляет значительное удобство, потому что сразу по установлении характеристик отдельного элемента они могут быть суммированы соответственно своему расположению.

Рассмотрев все элементы, мы получим полную систему уравнений. Эта система уравнений может быть просто записана как

$$[K] \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{e0}. \quad (I.12)$$

Она состоит из следующих матриц:

$$\left. \begin{aligned} [K_{im}] &= \Sigma [k_{im}]^a; \\ \{F_i\}_p &= \Sigma \{F_i\}_p^a; \\ \{F_i\}_{e0} &= \Sigma \{F_i\}_{i,0}^a. \end{aligned} \right\} \quad (I.13)$$

Суммирование произведено по всем элементам.

Если используются различные типы элементов конструкции, которые необходимо соединить, следует помнить, что правило суммирования матриц позволяет производить это только с матрицами одинакового размера. Отдельные суммируемые подматрицы должны иметь одинаковое число компонент сил или перемещений. Например, если учитываются моментные члены, а в каком-то узле находится шарнир, то необходимо дополнить матрицу жесткости последнего введением нулевых коэффициентов в позициях, соответствующих вращению или моменту. Система уравнений, получаемых из (I.12), может быть решена только в том случае, если в эти уравнения будут введены заранее предположенные ограничения смещений опор.

В примере на рис. 1, где обе компоненты смещений узлов I и b равны нулю, это будет равносильно введению

$$\{\delta_i\} = \{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

что эквивалентно уменьшению числа уравнений равновесия (в данном случае 12) исключением первой и последних пар i , таким образом, уменьшению общего числа неизвестных компонентов смещения до восьми. Однако всегда удобно объединять уравнения в соответствии с соотношением (I.12), что сохраняет простоту вычисления. Ясно, что без введения минимального числа заранее предполагаемых смещений для того, что предотвратить движение конструкции как жесткого тела, невозможно решить эту систему, потому что в этом случае смещения определяются через силы не единственным образом. Этот физически очевидный факт будет математически выражен тем, что матрица $[K]$ окажется сингулярной (особенной), т.е. не поддающейся обращению.

Введение соответствующих смещений после стадии объединения даст возможность единственного решения посредством исключения соответствующих строк и столбцов различных матриц. Хотя введение известных смещений является относительно легким при ручном счете и может быть легко запрограммировано для ЭВМ, что позволит уменьшить общее число решаемых уравнений, часто удобнее следовать прямому решению первоначального числа уравнений, чтобы избежать реорганизации памяти машины. Это легко достигается с помощью приема, предложенного Rayne and Irons [4].

Согласно этому методу вместо исключения уравнения равновесия, в котором известны заранее заданные смещения (соответствующие компоненты внешних сил не известны), и вместо введения этих компонентов смещений в оставшиеся уравнения диагональный коэффициент матрицы $[K]$ в рассматриваемой точке умножается на очень большое число. В то же время член в правой части уравнения заменяется произведением того же большого числа на величину предполагаемого смещения. В результате происходит замена данного уравнения другим уравнением, в котором искомое смещение равно заранее заданной величине, и сохранение этого уравнения в системе, которая должна решаться. Подробно этот процесс будет рассмотрен в следующих главах, связанных с задачами программирования. После нахождения неизвестных смещений легко вычислить напряжения и внутренние силы, применяя уравнение (I.4) последовательно к каждому элементу.

4. Преобразование координат

Часто удобнее определять характеристики отдельного элемента в системе координат, отличной от системы, в которой измеряются внешние силы и смещения объединенной конструкции.

Для облегчения вычисления для каждого элемента могут использоваться различные системы координат. Не трудно преобразовать координаты компонент смещений и сил в уравнении (I.3) в любую другую систему координат. Ясно, что это необходимо сделать прежде, чем будет предпринята попытка объединить конструкцию. Обозначим локальную систему координат, в которой свойства элементов нам известны, с помощью штриха, и общую систему координат, необходимую для объединения, без штриха. Компоненты смещения могут быть преобразованы с помощью соответствующей матрицы направляющих косинусов L как

$$\{\delta'\}^a = [L] \{\delta\}^a. \quad (I.14)$$

Компоненты силы преобразуем с использованием той же матрицы

$$\{F'\}^a = [L] \{F\}^a. \quad (I.15)$$

Если матрица жесткости была найдена в локальной (штрихованной) координатной системе, тогда для общей (глобальной) системы координат из уравнения (I.3) получим

$$\{F\}^a = [L]^{-1} \{F'\}^a = [L]^{-1} [k']^a [L] \{\delta\}^a + [L]^{-1} \{F'\}_p^a + [L]^{-1} \{F'\}_{e0}^a. \quad (I.16)$$

Матрица жесткости в общей координатной системе становится тогда равной

$$[k]^a = [L]^{-1} [k']^a [L]. \quad (I.17)$$

Так как матрица преобразования обладает свойством ортогональности, т. е. операция ее транспонированная равна операции ее инверсии¹, имеем

$$[L]^{-1} = [L]^T$$

и

$$[k]^a = [L]^T [k']^a [L].$$

Читатель может убедиться в полезности вышеописанного преобразования на примере балки с шарнирами на концах.

5. Заключительные замечания

Описанный здесь метод расчета сооружений известен как прямой расчет жесткости и, несомненно, является самым простым и наиболее прямым методом для инженера-расчетчика. Принципы, разработанные здесь, могут быть немедленно использованы при общем подходе к методу конечных элементов при условии предварительного определения свойств элемента, как это будет показано в главе II.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. P. Timoshenko and D. H. Young, Theory of Structures, 2nd ed., 1965, McGraw-Hill.
2. R. K. Livesley, Matrix Methods in Structural Analysis, Pergamon Press, 1964.
3. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aero. Sci., V. 23, pp. 805—823, 1956.
4. N. A. Пауэ и B. Ироп s. Private communication.

¹ Это легко доказать, исходя из того, что работа в обеих системах координат одинакова. Тогда

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F'\}^a)^T \{\delta'\}^a.$$

Из уравнений (1.14) и (1.15)

$$(\{F\}^a)^T \{\delta\}^a = (\{F\}^a)^T [L]^T [L] \{\delta\}^a.$$

Мы должны иметь

$$[L]^T [L] = [I] \quad \text{— единичная матрица.}$$

Таким образом,

$$[L]^{-1} = [L]^T.$$

6. Вступление

На многих этапах инженерных решений требуется знание распределения напряжения и деформации в упругом континууме. Это требуется для задач большого диапазона (от плосконапряженного и плоскодеформированного состояния, определения полей напряжений осесимметричных тел, изгибаемых плит и оболочек до полных трехмерных задач). Во всех случаях число внутренних связей между любым «конечным элементом», отделенным некими воображаемыми границами, и соседними элементами будет бесконечным. Поэтому трудно увидеть с первого взгляда, как такие задачи могут быть дискретизированы тем же методом, описание которого для простых сооружений приводилось в главе I. Эту трудность можно преодолеть (и добиться определенного приближения) следующим образом:

а. Континуум разбивается воображаемыми линиями или поверхностями на определенное число «конечных элементов».

б. Эти элементы предполагаются взаимосвязанными в дискретном числе узловых точек, расположенных на их границах. Как и при простом расчете конструкций, основными неизвестными параметрами в этой задаче окажутся смещения таких узловых точек.

в. Выбирается функция (или функции), которая может полностью определить смещение в каждом «конечном элементе» с помощью узловых смещений в этом элементе.

г. Функции смещения теперь единственным образом определяют состояние деформации внутри элемента с помощью узловых смещений. Эти деформации вместе с любыми начальными деформациями и упругими свойствами материала будут определять напряженное состояние во всем элементе и, следовательно, на его границах.

д. Определяется система сил, сосредоточенных в узлах и уравновешивающих граничные напряжения, а также любые распределенные нагрузки, в результате чего мы получаем жесткостную связь с перемещениями типа (I.3).

Если все эти условия достигнуты, решение задачи может быть выполнено стандартным методом матричного анализа конструкций, описанным ранее. Очевидно, что вводится ряд приближений. Во-первых, не всегда легко достичь такого положения, чтобы исследуемые нами функции смещения отвечали условиям непрерывности смещения между соседними элементами. Поэтому условие совмест-

ности на таких линиях может быть нарушено (хотя внутри каждого элемента это условие выполняется, в связи с однозначностью смещения, следующей из функционального представления). Вторых, так как эквивалентные силы сосредоточены в узлах, условия равновесия могут быть выполнены только в общем смысле, Местное нарушение условий равновесия внутри каждого элемента и на его границах не исключается.

Выбор формы элемента и характера функции смещения в отдельных случаях зависит от изобретательности инженера, и очевидно, что степень приближения, которая может быть достигнута, в значительной мере определяется этим. Подход, который мы описали здесь, известен как формулирование задачи в смещениях [1, 2].

До сих пор правильность описываемого нами процесса могла быть подтверждена только интуитивно, но далее будет показано, что наши предложения по существу заключаются в сведении к минимуму общей потенциальной энергии системы, выраженной через заданное поле перемещений. Если поле смещений будет определено правильно, можно получить сходимость с правильным результатом. В таком случае эта процедура тождественна известной процедуре Ритца. В следующих разделах данной главы, где пойдет речь о необходимых критериях сходимости, будет доказана тождественность этих двух процедур. Признание тождественности метода конечных элементов и процесса минимизации было сделано довольно поздно [3, 2]. Правда, Prager и Synge [4, 5] еще в 1947 г. предложили метод, во многом сходный с данным методом. Более широкие основы этого метода позволят расширить его применение почти во всех случаях, где возможна вариационная формулировка. Некоторые из этих задач не типа конструкций будут обсуждаться в главе X.

7. Прямая формулировка характеристик конечных элементов

Процедура получения характеристик конечного элемента континуума, которая была изложена в общих чертах, сейчас будет дана в более строгой математической форме. Желательно, конечно, получить результаты в общем виде, применимом в любом случае. Однако, чтобы избежать концептуальных трудностей, общие соотношения будут иллюстрированы простыми примерами расчета плоского напряженного состояния.

В этом случае (рис. 3) область разбивается на треугольные элементы. Будут введены матричные обозначения.

7.1. *Функция смещения* Типичный конечный элемент e определяется узлами i, j, m и т. д. и границами в виде прямых линий,

Пусть смещения в любой точке элемента определяются вектор-столбцом $\{f(x, y)\}$:

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i N_j N_m \dots] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad (\text{II.1})$$

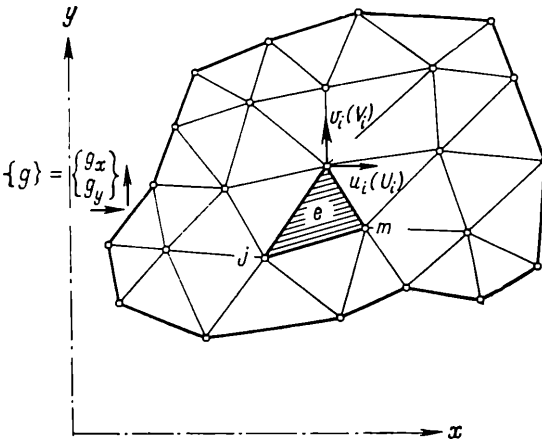


Рис. 3. Плоское напряженное состояние области, разбитой на конечные элементы

где компоненты $[N]$ являются функциями места, а $\{\delta\}^e$ есть ряд узловых смещений данного элемента. Так, например, в случае плосконапряженного состояния

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

характеризует горизонтальные и вертикальные смещения типичной точки внутри элемента, а

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

являются соответствующими смещениями узла i . Функции N_i, N_j, N_m должны быть выбраны так, чтобы при подстановке координат соответствующих узлов в уравнение (II.1) мы получили бы соответствующие узловые смещения.

Очевидно, в данном случае

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (единичная матрица),}$$

в то время как

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0 \text{ и т. д.,}$$

что просто удовлетворяется подходящими линейными функциями x и y . Подробно это будет рассмотрено в дальнейшем.

7.2. *Деформации.* Зная смещение во всех точках элемента, мы можем определить деформации в любой точке¹. В результате мы всегда получаем соотношение, которое в матричном виде может быть записано следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e. \quad (\text{II.2})$$

Для случая плосконапряженного состояния интересующие нас деформации определяются через смещения по хорошо известным соотношениям [6]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}.$$

Так как функции N_i , N_j , N_m уже определены, то из уравнения (II.1) можно легко найти матрицу $[B]$. Если мы примем эти функции линейными, деформации будут постоянными по всему элементу.

7.3. *Напряжения.* В общем, материал в границах элемента может испытывать начальные деформации, которые вызываются изменением температуры, усадкой, увеличением кристаллов и т. д. Если эти деформации обозначить $\{\varepsilon_0\}$, то напряжения будут вызваны различием между реальными и первоначальными деформациями. Если общий характер поведения принять упругим, связь между напряжениями и деформациями будет линейной и примет вид

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (\text{II.3})$$

где $[D]$ есть матрица упругости, отражающая соответствующие свойства материала. Опять для конкретного случая плосконапряженного состояния необходимо рассмотреть три компоненты напряжения, соответствующие трем компонентам деформации. В уже принятых обозначениях они будут иметь вид

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},$$

а матрицу $[D]$ можно просто получить из обычного соотношения «напряжение — деформация» для упругого изотропного материала [6]:

$$\varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y;$$

¹ Под деформациями здесь понимаются любые внутренние искажения, например, искривления в плитах.

$$\varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y;$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.$$

Из этого следует:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

7.4. Эквивалентные силы в узлах. Пусть

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

определяет силы в узлах, которые статически эквивалентны граничным напряжениям и нагрузкам, распределенным по элементу. Каждая из сил $\{F_i\}$ должна содержать такое же число компонентов, как и соответствующие смещения в узлах $[\delta_i]$, и должна действовать в соответствующих направлениях.

Распределенные нагрузки $\{p\}$ определяем как нагрузки, действующие на единицу объема материала элемента, в направлениях, соответствующих направлениям действия смещений $\{f\}$ в этой точке.

В частном случае плосконапряженного состояния силы в узле будут, например,

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix},$$

где компоненты U и V соответствуют направлениям смещений u и v , а распределенная нагрузка

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix},$$

где X и Y являются компонентами массовой силы.

Чтобы представить силы в узлах статически эквивалентными реальным граничным напряжениям и распределенным нагрузкам, необходимо задать произвольное (виртуальное) смещение в узлах и приравнять внешнюю и внутреннюю работу, произведенную различными силами и напряжениями на этих перемещениях.

Допустим, что такое виртуальное смещение в узлах будет $\{\delta^*\}^e$.

Тогда из уравнений (II.1) и (II.2) смещения и деформации внутри элемента будут соответственно равны

$$\begin{aligned} \{f^*\} &= [N] \{\delta^*\}^e, \\ \{\varepsilon^*\} &= [B] \{\delta^*\}^e. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Работа сил, приложенных в узлах, равняется сумме произведений отдельных компонентов силы на соответствующие смещения, т.е. в матричной форме¹

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e. \quad (\text{II.5})$$

Таким же образом внутренняя работа на единицу объема, произведенная напряжениями и распределенными силами, будет

$$\{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} - \{f^*\}^T \{p\} \quad (\text{II.6})$$

или²

$$(\{\delta^*\}^e)^T ([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \{p\}). \quad (\text{II.7})$$

Приравнявая внешнюю работу общей внутренней работе, которую мы находим с помощью интегрирования по всему объему элемента, получим

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = (\{\delta^*\}^e)^T (\int [B]^T \{\sigma\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol})). \quad (\text{II.8})$$

Так как это соотношение справедливо для любых виртуальных перемещений, должно существовать равенство множителей при левой и правой частях (II.8).

Таким образом, принимая во внимание уравнения (II.2) и (II.3), получим

$$\{F\}^e = (\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol})) \{\delta^*\}^e - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}). \quad (\text{II.9})$$

Это соотношение можно считать основной характеристикой любого элемента конструкции в той форме, которая описывалась в главе I уравнением (I.3).

Матрица жесткости принимает вид

$$[k]^e = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}). \quad (\text{II.10})$$

Силы в узлах, возникающие от распределенных нагрузок,

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol}), \quad (\text{II.11})$$

а силы, возникающие от начальной деформации,

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol}). \quad (\text{II.12})$$

()^T обозначает транспонированную матрицу.

По правилам матричной алгебры для транспонирования произведений

$$([A] [B])^T = [B]^T [A]^T.$$

В рассматриваемом случае треугольного плосконапряженного элемента эти характеристики можно получить при соответствующей подстановке. Уже отмечалось, что матрица $[B]$ в этом примере не зависит от координат, поэтому интегрирование производится чрезвычайно легко. Взаимосвязь и решение для полного объединения элементов производятся в соответствии с процессом для простой конструкции, описанным в главе I.

В общем случае в узлах могут существовать внешние сосредоточенные силы, и тогда следует добавить матрицу

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

для соблюдения условий равновесия в узлах. Очевидно, необходимо вкратце охарактеризовать поведение элементов у границы. Если смещение на границах заранее задано, не возникает дополнительных трудностей. Рассмотрим, однако, случай, когда граничный участок подвергается воздействию внешней нагрузки, например, (g) на единицу площади. В этом случае необходимо добавить нагрузочный член в узлах элемента, который имеет граничную поверхность.

При подсчете виртуальной работы он примет вид

$$\{F\}_b^e = - \int [N]^T \{g\} d(\text{area}), \quad (\text{II.14})$$

где интегрирование производится по граничной площади элемента. Следует отметить, что для того, чтобы вышеприведенное уравнение имело силу, $\{g\}$ должно иметь то же число компонентов, что и $\{f\}$.

Такой граничный элемент для специального случая плосконапряженного состояния показан на рис. 3. Интегрирование этого типа редко точно выполнимо. Обычно проектировщик с помощью интуиции рассматривает граничное нагружение как просто сосредоточенные нагрузки, действующие на граничные узлы, и проводит их вычисление простым статическим методом. В обсуждаемом случае результаты будут идентичны.

Определив узловое смещение решением общих уравнений теории сооружений, можно найти напряжения в любой точке элемента из уравнений (II.2) и (II.3)

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\epsilon_0\}, \quad (\text{II.15})$$

где мы узнаем типичные члены уравнения (I.4).

Матрица напряжения элемента примет вид

$$[S]^e = [D][B], \quad (\text{II.16})$$

а первоначальное напряжение

$$\{\sigma_0\}^e = - [D]\{\epsilon_0\}. \quad (\text{II.17})$$

Следует объяснить отсутствие члена напряжений $\{\sigma\}_p^e$, получаемых от распределенной нагрузки.

Это отсутствие объясняется тем, что мы не рассматривали внутреннего равновесия в каждом элементе, а установили только условия общего равновесия.

7.5. *Обобщенный характер смещений, деформаций и напряжений.* Физический смысл смещений, деформаций и напряжений в иллюстрируемом случае вполне очевиден. Во многих других случаях, которые будут в дальнейшем приведены в этой книге, эта же терминология применяется по отношению к другим, менее очевидным величинам. Например, при исследовании плоских элементов смещение может обозначать поперечный прогиб и наклон плиты в определенной точке. Деформация тогда будет характеризовать изгиб срединной поверхности, а напряжение — соответствующие внутренние изгибающие моменты. Все полученные здесь выражения в целом имеют силу в случае, если сумма произведений смещений на соответствующие нагрузочные компоненты действительно выражает произведенную внешнюю работу, а компоненты «деформации» и соответствующие им компоненты «напряжения» выражают общую внутреннюю работу.

8. Энергетический подход

Представленное здесь определение свойств элемента континуума является, вероятно, наиболее прямым и физически объяснимым. Однако понятие о замене распределенных напряжений на границах элемента эквивалентными статическими нагрузками может вызвать некоторые вопросы о соответствии реальных физических условий, аппроксимированными при данном процессе. Поэтому желательно подойти к решению вопроса другим путем, при котором мы увидим сходство в формулировках с хорошо известным методом Ритца и, между прочим, можем получить возможности гораздо более широкого применения метода конечных элементов за пределы задач теории сооружений.

В этом пункте будет показано, что, если система смещений определена по всему сооружению с помощью функций смещения элемента, где смещения в узлах являются неопределенными параметрами, то процесс минимизации общей потенциальной энергии системы будет определяться в точно той же форме, которая была получена выше. Для ясности здесь вновь формулируется принцип минимума потенциальной энергии.

8.1. *Принцип минимума потенциальной энергии.* Пусть U есть энергия деформации конструкции, находящейся под действием системы распределенных нагрузок $\{p\}$ (на единицу объема), сосредоточенных нагрузок $\{R\}$ ¹ и подвергающейся смещениям $\{f\}$ и $\{\delta\}$ соответственно.

¹ Принимается, что граничные нагрузки являются частью приложенных к системе нагрузок.

Если система находится в равновесии и если затем происходит бесконечно малое изменение смещения $d\{\delta\}$, то внешняя работа, производимая нагрузками, должна равняться изменению энергии деформации, т. е.

$$d(U) = d(\{R\}^T \{\delta\}) + d(\int \{p\}^T \{f\} d(\text{vol})), \quad (\text{II.18})$$

или

$$d[U - \{R\}^T \{\delta\} - \int \{p\}^T \{f\} d(\text{vol})] = 0. \quad (\text{II.19})$$

Последние два члена величины, заключенной в скобки, есть потенциальная энергия нагруженной системы W , следовательно,

$$\Phi = U + W \quad (\text{II.20})$$

есть общая потенциальная энергия системы, и мы имеем

$$d[\Phi] = 0. \quad (\text{II.21})$$

Отсюда следует, что общая потенциальная энергия должна быть стационарной величиной. Так как энергия деформации всегда является положительным числом, в то время как величина W может быть и положительной и отрицательной, состояние устойчивого равновесия соответствует минимальной величине. Таким образом, для заданного поля смещений и деформаций условия равновесия удовлетворяются в случае, если общая потенциальная энергия равна минимальной величине.

Если взять ряд смещений, характеризуемых дискретной серией параметров, то наилучшими будут те, которые обратят в минимум потенциальную энергию при налагаемых ограничениях. В этом случае очевидно, что потенциальная энергия будет или равна энергии, соответствующей положению истинного равновесия, или превышать ее.

8.2. *Характеристики элементов.* Снова представим континуум разделенным воображаемыми линиями на элементы. Узловые смещения, записанные во всех узлах традиционным способом [см. (I.7)].

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{array} \right\}, \quad (\text{II.22})$$

будут определять положение смещения во всем континууме поэлементно с помощью уравнения (II.1). Внутри типичного элемента (e) , как и раньше, мы имеем

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e,$$

где матрица $\{\delta\}^e$ выражает смещения в узлах, связанные с определенным элементом.

Для минимизации общей потенциальной энергии Φ относительно узловых смещений, рассматриваемых как переменные параметры, необходимо ввести систему уравнений типа ¹

$$\frac{\partial (\Phi)}{\partial \{\delta_i\}} = 0. \quad (\text{II.23})$$

Общая потенциальная энергия может рассматриваться как сумма потенциальных энергий, содержащихся в отдельных элементах Φ^e , и потенциальной энергии узловых нагрузок $\{R\}$, т. е.

$$\Phi = \Sigma \Phi^e - \{R\}^T \{\delta\}, \quad (\text{II.24})$$

и тогда с помощью правил дифференцирования, помещенных в примечании на стр. 25, уравнение (II,23) примет вид

$$\frac{\partial (\Phi)}{\partial \{\delta_i\}} = \Sigma \frac{\partial (\Phi^e)}{\partial \{\delta_i\}} - \{R_i\}. \quad (\text{II.25})$$

Таким образом, нам необходимо учитывать только изменения общей потенциальной энергии в каждом типичном элементе. Скорость изменения энергии деформации внутри элемента на единицу объема может быть представлена в виде дифференциала

$$\frac{\partial (\{\sigma\}^T \{\varepsilon\})}{\partial \{\delta_i\}} = \frac{\partial (\{\varepsilon\})}{\partial \{\delta_i\}} \{\sigma\},$$

¹ Дифференцирование в этом случае производится относительно вектора

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix},$$

который может иметь несколько компонентов. Очевидный смысл этого выражается в

$$\frac{\partial (\Phi)}{\partial \{\delta_i\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} \end{Bmatrix}.$$

Если дифференцируемая функция сама есть вектор, этот процесс определяется как

$$\frac{\partial \{a\}}{\partial \{\delta_i\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i} \\ \frac{\partial}{\partial v_i} \\ \frac{\partial}{\partial w_i} \end{Bmatrix} \{a\}^T.$$

так как изменяются только деформации. Подставляя уравнение (II.2) в (II.3), получаем

$$\frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial \{\delta_i\}} ([B]^T [D] [B] \{\delta\}^e - [B]^T [D] \{\epsilon_0\}). \quad (\text{II.26})$$

Аналогично изменение потенциальной энергии на единицу объема элемента

$$\frac{\partial (\{p\}^T \{f\})}{\partial \{\delta_i\}} = \frac{\partial \{f\}}{\partial \{\delta_i\}} \{p\},$$

что при подстановке уравнения (II.1) примет вид

$$\frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial \{\delta_i\}} [N]^T \{p\}.$$

Для всего элемента после интегрирования получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Phi)^e}{\partial \{\delta_i\}} = \frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial \{\delta_i\}} [& \int ([B]^T [D] [B] d(\text{vol})) \{\delta\}^e - \int [B]^T [D] \{\epsilon_0\} d(\text{vol}) - \\ & - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol})] \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

и, включив все узлы, будем иметь

$$\frac{\partial (\Phi)^e}{\partial \{\delta\}^e} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi^e}{\partial \{\delta_i\}} \\ \frac{\partial \Phi^e}{\partial \{\delta_j\}} \\ \frac{\partial \Phi^e}{\partial \{\delta_m\}} \end{array} \right\} = [k]^e \{\delta\}^e - \{F\}_p^e - \{F\}_{\epsilon_0}^e, \quad (\text{II.28})$$

где $[k]^e$, $\{F\}_p^e$, $\{F\}_{\epsilon_0}^e$ есть в точности те же величины, которые определяются с помощью уравнений (II.10), (II.11) и (II.12).

Уравнение (II.25) может, таким образом, рассматриваться как типичное условие равновесия в узле i (см. (I.12)) и строится по тем же правилам.

Этот путь получения жесткостной связи на основе минимизации общей потенциальной энергии системы показывает, что метод конечных элементов в сущности подобен хорошо известному методу Ритца. При обычном использовании метода Ритца узлы смещения, в которых задается переменный параметр, расположены во всем рассматриваемом объеме. При использовании метода конечных элементов специальная форма функций, связанных только с отдельными элементами, ограничивает «связи» в конечном уравнении, с помощью которого определяются параметры, и придает им форму, имеющую явное конструктивное значение. Следует заметить, что приведенный здесь вывод следует из того, что смещения, определяемые различными формами функций, внутри элементов непрерывны вплоть до самых границ. В противном случае энергия деформации накапливалась бы в бесконечно малой области вдоль границ, где наблюдались бы бесконечно большие деформации.

9. Критерии сходимости

Предлагаемые функции формы ограничивают бесконечное число степеней свободы системы, и поэтому истинный минимум энергии никогда не будет достигнут независимо от числа разбиений. Для достижения сходимости, которая давала бы верные результаты, необходимо удовлетворить простым требованиям. Очевидно, например, что функция смещения должна представлять распределение истинного смещения так близко, как это возможно. Это условие, однако, не будет соблюдаться, если выбранные функции таковы, что деформирование элемента возможно, когда он перемещается как твердое тело.

Таким образом, функция смещения должна удовлетворять следующим критериям.

Критерий 1. Функция смещения не должна допускать деформации элемента в случаях, когда существуют лишь перемещения тела как целого. Это получевидное условие может быть легко нарушено при выборе определенного типа функций смещений; поэтому выбор функций смещений должен производиться осторожно.

Второй критерий должен исходить из следующих требований. Очевидно, что чем более мелкими становятся элементы, в них будут преобладать состояния, близкие к постоянной деформации. Если существуют эти условия постоянной деформации, для точности нам более желательно, чтобы элемент конечных размеров смог бы точно воспроизводить их. Возможно построить функции, которые удовлетворяют первому критерию, но в то же время дают изменения деформации в элементе в то время, когда смещения узлов совместны с постоянным деформированным состоянием. Подобные функции не дадут хорошей сходимости к точному решению и не смогут, даже в пределе, представлять истинного распределения деформации.

Критерий 2. Функция смещения должна быть такова, что в случае, если узловые смещения совместны с существованием постоянной деформации, эта постоянная деформация была бы действительно получена. (В этом случае снова подразумевается обобщенное определение деформации).

Мы увидим, что критерий 2 действительно связан с критерием 1, так как смещения твердого тела являются частным проявлением постоянной деформации — с величиной, равной нулю.

10. Функции смещения с разрывами между элементами

В некоторых случаях возникают определенные трудности в выборе функций смещения для элемента, которые бы были автоматически непрерывны по всей поверхности раздела между соседними элементами. Как уже указывалось, разрыв смещения вызывает бесконечные деформации на поверхности раздела. Этот фактор не учитывался в представленной формуле, так как добавка энергии

ограничена самими элементами. Однако если в пределе при уменьшении размера разбиения непрерывность восстанавливается, то полученная формула будет правильной.

Это условие часто достижимо, если:

условие постоянной деформации автоматически обеспечивает непрерывность смещения;

удовлетворяется вышеизложенный критерий постоянной деформации.

При решении некоторых вопросов в этой книге будут использоваться разрывные функции смещения этого типа.

11. Границы решения

Если использовать функции смещения, которые не вызывают разрыва между смещениями соседних элементов, то, очевидно, на каждой стадии решения величина общей энергии будет превосходить истинный минимум. Однако более существенно то, что энергия деформации, соответствующая приближенному решению, всегда меньше той энергии, которая получается в результате точного решения в случае, если смещения заданы заранее^{1, 2}.

Величина полученной энергии деформации и поэтому общая сумма произведений смещений на нагрузку всегда окажется уменьшенной. Таким образом, устанавливается низший предел этого произведения. Это очень важное свойство при оценке результатов расчета с инженерной точки зрения.

Здесь необходимо подчеркнуть, что эти границы не подходят в случаях, когда возникает разрыв на поверхности раздела.

12. Расширение вариационного подхода

Концепция метода конечных элементов, примененного к упругим задачам, как процесса, при котором общая потенциальная энергия минимизируется по узловым смещениям, может быть расширена на большее число физических задач, где существует принцип экстремума.

В таких задачах точным решением является такое, с помощью которого производится минимизация некоего интеграла неизвест-

¹ Доказательством этого служит простой факт, что потенциальная энергия численно равна удвоенному количеству работы, произведенной во время линейного сопротивления смещению, что, в свою очередь, равняется энергии деформации системы вне зависимости от того, представлена ли она истинными или приближенными величинами. Таким образом, энергия деформации пропорциональна общей энергии, но противоположна ей по знаку. Поэтому это уменьшение неизбежно в случае, если смещения заданы заранее.

² Имеется в виду, что потенциальная энергия внешних сил равна удвоенной упругой энергии деформирования и вообще:

$$E_{\text{внешн.}} = 2E_{\text{упр.}}; E_{\text{полн.}} = E_{\text{упр.}} - E_{\text{вн.шн.}} = -E_{\text{упр.}} \text{ (прим. отв. ред.)}$$

ной функции или ее производных. Этот интеграл называют функционалом задачи. Если неизвестная функция определяется поэлементно по всей области с помощью узловых величин функции аналогично уравнению (II.1), то при минимизации функционала мы получим ряд обыкновенных уравнений, равных числу неизвестных величин функции в узлах. Если задача сводится к условиям, при которых «функционал» есть интеграл от членов, включающих неизвестную функцию или ее производные в степени ноль, один или два, то уравнения, получаемые в результате процесса минимизации, будут такого же типа, как и уравнения, используемые в линейном расчете жесткости сооружения. Практический случай применения подобного расширения будет описан в главе X, в которой представлены физические задачи, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка. В задачах теории сооружений, обсуждаемых в данной книге, обычно используется принцип минимизации потенциальной энергии системы, выраженной в функции параметров смещения. Однако возможен и другой подход в случае, если функционал, который нам нужно минимизировать, является полной дополнительной энергией системы. Если теперь, для определения деформаций и соответственно дополнительной энергии, вместо системы совместных смещений берется система напряжений в состоянии равновесия, то мы можем получить другой вариант формулирования метода конечных элементов.

Этот вариант, впервые разработанный В. Fraeijis de Veubeke [7], гораздо сложнее, так как описание равновесия системы в усилиях более трудоемко, чем описание в смещениях. Однако тот факт, что с помощью этого метода можно получить завышенную величину энергии деформации (верхняя граница), в то время как обычный метод дает заниженную величину энергии деформации (нижняя граница), не имеет большого значения при заключении в скобки решения «в вилку» и определении степени точности.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

В общем виде в методе конечных элементов приближенное решение задачи свдано к минимизации функционала, который мы определили как

$$\chi = \int G \left(x, y, z, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^n}, \frac{\partial \Phi^n}{\partial z^n} \right) d(R) \quad (A),$$

где Φ есть неизвестная функция; n — порядок высшей производной, включенной в вышеприведенное определение, а R — область, в которой мы ищем решение. Допустив возможность существования единственного минимизирующего решения, разбиваем эту область на отдельные подобласти или элементы. Тогда функция Φ распределяется с помощью конечного числа параметров, заключенного в каждом элементе, и, если χ^e есть добавка каждого типового элемента в величину χ , то можно принять

$$\chi = \Sigma \chi^e \quad (B).$$

В целом это справедливо лишь в случае, если на граничных поверхностях элемента не появляется «бесконечная» величина G .

Отсюда условие непрерывности заменяется требованием, чтобы Φ и все его производные до порядка $n-1$ были непрерывны и конечны на граничной поверхности. Если χ_m есть решение в результате приближенного процесса минимизации, то верхнюю границу истинного решения χ_{\min} можно получить при условии

$$\bar{\chi}_m \geq \chi_{\min} \quad (C).$$

Это положение очевидно из самой постановки задачи. Очевидно также, что если произвести более точное разбиение, в результате которого мы получим χ_{m+1} , то

$$\bar{\chi}_{m+1} \leq \bar{\chi}_m \quad (D)$$

в случае, когда приближенное определение Φ_m включается в определение Φ_{m+1} . В таких случаях сходимость будет монотонной. Таким образом, мы убеждаемся, что сходимость действительно происходит при уменьшении размера элементов.

Это будет действительно так в случае, если при истинном решении G является конечной однозначной функцией и если введенная аппроксимация для Φ в пределе дает ее точное значение. Приближение должно производиться так, чтобы оно включало возможность любой постоянной величины G по всему элементу. Это возможно в случае, если Φ и n ее производных, встречающихся в определении G , могут принимать любые постоянные значения внутри элемента.

Указанный критерий, являющийся расширением ранее упомянутого условия «постоянства деформации», и есть необходимое условие сходимости.

Если это условие удовлетворяется, то любой набор величин G может быть представлен с помощью приближения бесконечного числа элементов со всеми размерами, стремящимися к нулю, при этом предложенное условие явится также достаточным для обеспечения сходимости к правильному решению.

Этот эвристический метод не учитывает некоторые особенности, и, если эти особенности имеются, то пользоваться методом нужно чрезвычайно осторожно, как и любым методом численных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. W. Clough, The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 1960.
2. R. W. Clough, The finite element method in structural mechanics, chapter 7 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
3. J. Szmelter, The energy method of networks of arbitrary shape in problems of the theory of elasticity, Proc. I.U.T.A.M., Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, ed. by W. Olszak, Pergamon Press, 1959.
4. W. Prager and J. L. Synge, Approximation in Elasticity based on the concept of function space, Quart. Appl. Math., 5, pp. 241—69, 1947.
5. J. L. Synge, The Hypercircle in Mathematical Physics, Camp. Univ. Press, 1957.
6. S. Timoshenko and J. H. Goodier, Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
7. B. Fraeijis de Veubeke, Displacement and equilibrium models in the finite element method, Chapter 9 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1955.

Глава III

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

13. Вступление

Двумерные упругие задачи были первыми примерами успешного применения метода конечных элементов [1, 2]. В главе II уже рассматривались эти задачи, чтобы проиллюстрировать основные положения метода конечных элементов; там были выведены основные соотношения. Основные соотношения представлены в уравнениях (II.1), (II.2), (II.3), (II.9), (II.10), (II.15), которые для удобства суммированы в приложении II. В этой главе отдельные соотношения, характерные для данной задачи, будут рассмотрены более подробно и будут иллюстрированы на практических примерах; такого порядка мы будем придерживаться и в дальнейшем. Читателю, не знакомому с основными понятиями теории упругости, следует обратиться к пособиям, дающим эти основные понятия, в частности, к работе Timoshenko and Goodier [3]. Обозначения, принятые в этой работе часто будут использованы здесь. В обеих задачах плоского напряженного состояния и плоской деформации поле смещений единственно и определяется с помощью u и v — смещений в направлениях декартовых ортогональных координат x и y . В обеих задачах тензоры напряжений и деформаций имеют по три компонента в плоскости $x—y$. В случае плоского напряженного состояния по условию все остальные компоненты напряжения равны нулю и поэтому не дают вклада во внутреннюю работу. При плоской деформации напряжение в направлении, перпендикулярном к плоскости $x—y$, — величина, отличная от нуля. Однако по условию деформация в этом направлении нулевая, и поэтому напряжение не дает вклада во внутреннюю работу, что можно при желании явно определить из трех главных компонентов напряжения в конце всех вычислений.

14. Характеристика элемента

14.1. Функции смещения. На рис. 4 показан типичный треугольный элемент с узлами i, j, m , обозначенными в направлении против часовой стрелки.

Смещения в узле имеют два компонента

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

и еще шесть компонентов смещений элемента обозначены как вектор

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.2})$$

Смещения внутри элемента определяются единственным образом с помощью этих шести величин. Самое простое представление можно дать с помощью двух линейных многочленов

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (\text{III.3})$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

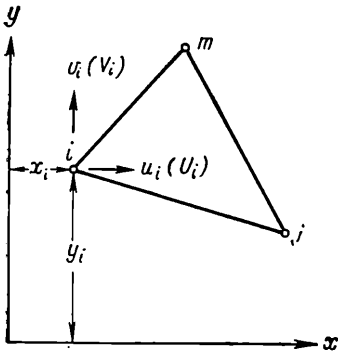


Рис. 4. Элемент континуума в задаче плосконапряженного состояния и плоской деформации

Шесть постоянных α можно легко вычислить, решив две системы по три совместных уравнения, которые мы получим, если введем координаты узлов и приравняем смещения соответствующим узловым смещениям. Записав, например,

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \right\}, \quad (\text{III.4})$$

мы можем легко получить решения для α_1 , α_2 и α_3 через узловые смещения u_i , u_j , u_m . Окончательно получим

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m], \quad (\text{III.5a})$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j; \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm}; \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj}, \end{aligned} \quad (\text{III.5b})$$

причем остальные коэффициенты можно получить циклической перестановкой нижних индексов в последовательности i, j, m и где

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \text{ (площадь треугольника } ijm). \quad (\text{III.5c})$$

Так как уравнения для вертикального смещения v будут аналогичны, мы также получим

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m]. \quad (\text{III.6})$$

Хотя на данном этапе это не обязательно, мы можем представить вышеприведенные соотношения, выраженные уравнениями (III.5 а) и (III.6), в стандартной форме уравнения (II.1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N'_i, N'_j, N'_m] \{\delta\}^e, \quad (\text{III.7})$$

где I — единичная матрица размером 2×2 , а

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta. \quad (\text{III.8})$$

Примечание. Если координаты берутся в центре тяжести элемента, то $x_i + x_m + x_j = y_i + y_j + y_m = 0$ и $a_i = 2\Delta/3 = a_j = a_m$.

Выбранная функция смещения автоматически обеспечивает непрерывность смещения с соседними элементами, так как смещения изменяются линейно вдоль любой стороны треугольника и при одинаковом смещении в узлах такие же самые смещения будут вдоль всей внутренней границы.

14.2. *Деформация (общая)*. Общая деформация в любой точке элемента может быть определена с помощью трех компонентов, которые вносят вклад во внутреннюю работу:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

С помощью уравнений (III.5 а) и (III.6) получаем

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i, 0, & b_j, 0, & b_m, 0 \\ 0, c_i, 0, & c_j, 0, & c_m \\ c_i, b_i, c_j, & b_j, c_m, & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e, \quad (\text{III.10})$$

что дает явное решение для матрицы $[B]$ уравнения (II.2).

Необходимо заметить, что в этом случае матрица $[B]$ не зависит от положения внутри элемента и поэтому деформации в ней постоянны. Очевидно, критерий постоянной деформации, упоминавшийся в главе II, удовлетворяется для функций такого вида.

14.3. *Начальная деформация (термическая деформация)*. Начальные деформации, т.е. деформации, не зависящие от напряжения, могут возникать по многим причинам. Усадка, рост кри-

сталлов и, чаще всего, изменение температуры в основном приводят к тому, что вектор начальной деформации равен

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_0} \\ \epsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.11})$$

Хотя эта первоначальная деформация может в основном зависеть от положения внутри элемента, обычно она определяется средними постоянными величинами. Это соответствует условиям постоянной деформации, характеризуемым заданной функцией смещения.

Так, для случая плоского напряженного состояния в элементе изотропного материала, подвергаемом влиянию повышения температуры, θ^e с коэффициентом теплового расширения α мы будем иметь

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.12})$$

так как при тепловом расширении не возникает сдвиговой деформации.

В случае плоской деформации положение более сложно. Само понятие плоской деформации предполагает возникновение напряжений, перпендикулярных к плоскости $x-y$, в связи с тепловым расширением даже без участия трех основных компонентов напряжения. Поэтому начальная деформация будет зависеть от постоянных упругости. Будет показано, что в этом случае

$$\{\epsilon_0\} = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.13})$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Анизотропные материалы представляют еще большую сложность, так как коэффициенты теплового расширения могут изменяться в зависимости от направления.

Пусть x' и y' на рис. 5 выражают основные направления материала. Начальная деформация теплового расширения в этих координатах для случая плосконапряженного состояния принимает вид

$$\{\epsilon_0\}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'0} \\ \epsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.14})$$

где α_1 и α_2 есть коэффициенты расширения вдоль осей x' и y' соответственно.

Для нахождения компонентов деформации в системе координат x, y необходимо воспользоваться матрицей преобразования деформации [T]

$$\{\epsilon'_0\} = [T]^T \{\epsilon_0\}. \quad (\text{III.15})$$

Определив β из рис. 5, можно легко установить, что

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно легко найти величину $\{\epsilon_0\}$. Необходимо заметить, что сдвиговой компонент деформации в координатах x, y больше не равен нулю.

14.4. Матрица упругости. Матрица [D] из уравнения (II.3)

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\epsilon_0\} \quad (\text{III.16})$$

может быть установлена для любого материала.

Плоское напряженное состояние — изотропные материалы.

По условию задачи для плосконапряженного состояния в изотропном материале мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \epsilon_{x0} \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E + \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E + \epsilon_{xy0} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.17})$$

Решая это уравнение для напряжений, получим матрицу

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (\text{III.18})$$

где E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Плоская деформация — изотропные материалы.

В этом случае в дополнение к трем компонентам напряжения существует нормальное напряжение σ_z . В специальном случае теплового расширения изотропного материала мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu\sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \epsilon_y &= -\nu\sigma_x/E + \sigma_y/E - \nu\sigma_z/E + \alpha\theta^e \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.19})$$

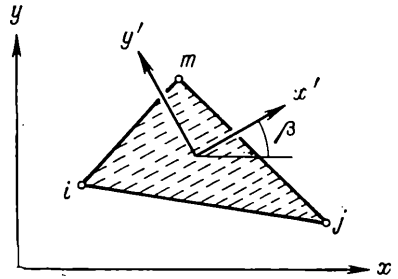


Рис. 5. Элемент многослойного (трансверсально-изотропного) материала

и дополнительно

$$\varepsilon_z = 0 = -\nu\sigma_x/E - \nu\sigma_y/E + \sigma_z/E + a\theta^e.$$

Решая относительно σ_z и подставляя в (III.19), получим уже приведенную нами формулу начальной деформации (уравнение (III.13)). Сравнивая далее с уравнением (III.16), получим, что матрица

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.20})$$

Анизотропные материалы.

Для определения соотношений напряжение — деформация в пространственных задачах полностью анизотропного материала требуется 21 независимая постоянная упругости [4, 5].

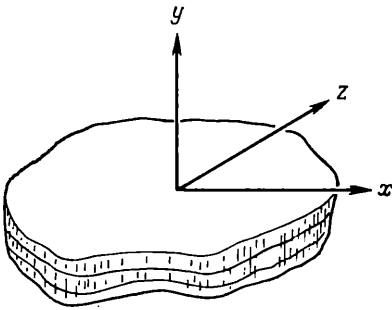


Рис. 6. Многослойный (трансверсально-изотропный) материал (плоскость слоев параллельна $x-z$)

Для задач плосконапряженного и плоскодеформированного состояния необходимо учитывать симметрию свойств, включая как максимум шесть независимых постоянных в матрице $[D]$.

Таким образом, для выражения наиболее общего плосконапряженного и плоскодеформированного состояния можно записать

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ (\text{sym}) & & d_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.21})$$

(Необходимая симметрия матрицы $[D]$ вытекает из теоремы взаимности Максвелла — Бетти и является следствием инвариантности энергии независимо от того, каким способом было получено данное деформированное состояние). Особый практический интерес представляет случай многослойного или трансверсально-изотропного материала, в котором существует симметрия вращения в плоскости слоев. Такой материал имеет только пять независимых постоянных упругости. Общие соотношения напряжение — деформация, следуя обозначениям, принятым у Лехницкого [4], и принимая ось y перпендикулярной к слоям (без учета начальной деформации) (рис. 6), имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 - \nu_1\sigma_z/E_1; & \varepsilon_y &= -\nu_2\sigma_x/E_2 + \\ & & & + \sigma_y/E_2 - \nu_2\sigma_z/E_2; \\ \varepsilon_z &= -\nu_1\sigma_x/E_1 - \nu_2\sigma_y/E_2 + \sigma_z/E_1; & \gamma_{xz} &= \{2(1+\nu_1)/E_1\} \tau_{xz}; \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_2} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_2} \tau_{yz},$$

где постоянные E_1, ν_1 (G_1 зависима) определяют свойства материала в плоскости слоев, а E_2, G_2, ν_2 — в направлении, перпендикулярном к плоскости этих слоев. Матрицу $[D]$ в плосконапряженном и плоскодеформированном состоянии, принимая, что

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{и} \quad \frac{G_2}{E_2} = m,$$

можно записать

$$[D] = \frac{E_2}{(1 - \nu_2^2)} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - \nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

для плосконапряженного состояния.

Или

$$D = \frac{E_2}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2)} \times \begin{bmatrix} n(1 - \nu_2^2) & n\nu_2(1 + \nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1 + \nu_1) & (1 - \nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

— для плоскодеформированного состояния.

Если, как на рис. 5, направление слоя образует угол с осью x , то для получения матрицы $[D]$ в универсальных координатах необходимо произвести преобразование. Принимая $[D']$ как соотношение между напряжениями и деформациями в системе координат x', y' , легко показать, что

$$[D] = [T][D'] [T]^T \quad (\text{III.25})$$

где $[T]$ определена уравнением (III.15).

Если системам напряжений $\{\sigma'\}$ и $\{\sigma\}$ соответствуют $\{\epsilon'\}$ и $\{\epsilon\}$, то, приравнявая выражения для работ

$$\{\sigma'\}^T \{\epsilon'\} = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}$$

или

$$\{\epsilon'\}^T [D'] \{\epsilon'\} = \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\},$$

после подстановки уравнения (III.15) получаем уравнение (III.25) (см. примечание в главе I).

14.5. Матрица жесткости. Матрица жесткости элемента ijm определяется из общего соотношения (II.10)

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] t dx dy, \quad (\text{III.26})$$

где t есть толщина элемента, а интегрирование производилось по площади треугольника. Если толщину элемента принять постоянной (при допущении, что решение сводится к точному по мере уменьшения размера элемента), то, так как ни одна из матриц не содержит x или y , мы просто будем иметь

$$[k] = [B]^T [D] [B] t\Delta, \quad (III.27)$$

где Δ — площадь треугольника (уже определенная из уравнения (III.5)).

В этой форме удобно вести вычисления, причем операции реальными матрицами можно производить с помощью машин.

Матрица $[B]$, определенная из уравнения (III.10), может быть записана

$$[B] = [B_i, B_j, B_m]; \quad [B_i] = \begin{Bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{Bmatrix} / 2\Delta. \quad (III.28)$$

Матрицу жесткости можно записать в расчлененной форме

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (III.29)$$

где подматрицы имеют вид

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] t\Delta. \quad (III.30)$$

Эта форма часто удобна для вычислений.

14.6. Силы в узлах, возникающие при начальной деформации
Эти силы определяются непосредственно с помощью уравнения (II.12), которое после интегрирования принимает вид

$$\{F\}_{\epsilon_0}^e = - [B]^T [D] [\epsilon_0] t\Delta. \quad (III.31)$$

Компоненты силы могут быть записаны

$$\{F_i\}_e = - [B_i]^T [D] [\epsilon_0] t\Delta. \quad (III.32)$$

Эти силы, вызванные «начальной деформацией», действуют на узлы элемента неодинаково и требуют точной оценки.

14.7 Распределенные массовые силы. В общем случае плоское напряженное состояние и плоской деформации каждый элемент единичной площади в плоскости x, y испытывает воздействие си

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

в направлении соответствующих осей.

Вклад этих сил в величину сил, действующих на каждый узел, снова определяется с помощью уравнения (II.11)

$$\{F\}_p^e = - \int [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} dx dy,$$

или, используя (III.7),

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int N_i dx dy, \quad (\text{III.33})$$

если массовые силы X и Y постоянны. Хотя N_i не являются постоянными, можно произвести явное интегрирование. Некоторые общие формулы интегрирования для треугольника даны в Приложении III.

В специальном случае вычисления упрощаются, если начало координат принимается в центре тяжести элемента.

Тогда

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0$$

и с помощью уравнения (III.8) получим

$$\{F_i\}_p = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \int a_i dx dy / 2\Delta = - \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} a_i / 2,$$

или

$$\{F_i\}_p = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3 = \{F_j\}_p = \{F_m\}_p \quad (\text{III.34})$$

в соответствии с примечанием, указанным на стр. 33.

Для всего элемента

$$\{F\}_p^e = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \Delta / 3, \quad (\text{III.35})$$

что просто означает, что общие силы, действующие в направлении x и y под влиянием массовых сил в теле, распределены в узлах на три равные части. Это явление соответствует физической природе и часто принималось как безоговорочное.

14.8. *Потенциал массовых сил, действующих в теле.* Во многих случаях массовая сила выражается с помощью потенциала Φ как

$$X = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (\text{III.36})$$

и именно этот потенциал, а не величины X и Y , задается во всей области и определен в узловых точках. Если $\{\Phi\}^e$ есть вектор, определенный тремя компонентами потенциала, связанными с узлами элемента, т. е.

$$\{\Phi\}^e = \begin{Bmatrix} \Phi_l \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.37})$$

и соответствует постоянным величинам X и Y , то Φ должен линейно изменяться внутри элемента. «Функция формы» будет преобразовываться с помощью той же процедуры, какую мы использовали при выводе уравнений (III.4)—(III.6), в результате чего получаем

$$\Phi = [N'_i, N'_j, N'_m] \{\Phi\}^e. \quad (\text{III.38})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -[b_i, b_j, b_m] \{\Phi\}^e / 2\Delta; \\ Y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -[c_i, c_j, c_m] \{\Phi\}^e / 2\Delta. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Подставив вектор узловых сил, соответствующих потенциалу массовых сил, вместо уравнения (III.35), получаем

$$\{F\}_p^e = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \{\Phi\}^e. \quad (\text{III.40})$$

14.9. Определение напряжений. Выведенная формула позволяет составить полную матрицу жесткости конструкции и получить решение для смещений.

Матрица напряжений, определенная в общих чертах уравнением (II.15), может быть получена с помощью соответствующих подстановок для каждого элемента. Предполагается, что напряжения внутри элементов постоянны. Обычно они прилагаются к центру тяжести элемента, и в большинстве примеров, рассматриваемых в данной главе, соблюдается этот принцип. Другой принцип заключается в том, что величины напряжения прилагаются в узлах методом осреднения величин в соседних элементах. В этой связи используются некоторые процедуры по взвешиванию на эмпирической основе, но преимущество этого метода незначительно. Главные напряжения, действующие в каждом элементе, и направления этих напряжений обычно могут быть вычислены с помощью машины.

15. Примеры. Оценка степени точности

Несомненно, что решение задач плосконапряженного или плоского деформированного состояния теории упругости, как они сформулированы в параграфе 14, в пределе может быть точным в зависимости от степени разбивки элемента.

На каждой стадии разбивки на конечное число элементов решение будет приближенным, как, например, решение ряда Фурье с ограниченным числом членов. Как уже говорилось в главе II, величина общей энергии деформации, получаемая в процессе приближенного решения, будет ниже истинной величины энергии деформации, получаемой при точном решении. На практике это будет означать, что величины смещения, а следовательно, и напряжения, будут преуменьшены при приближенном решении. Однако необходимо подчеркнуть, что это не обязательно будет справедливо для каждой отдельной точки, поэтому величина такой границы на практике не очень велика. Для инженера важно знать степень точности, возможной при решении типовых задач при определенной степени разбивки элемента. В каждом конкретном случае ошибку можно определить, сравнив данные с известным точным решением или изучением сходимости с применением двух или более стадий разбивки. По мере накопления опыта инженер может априорно определить степень приближения, которая ему необходима при решении конкретной задачи, связанной с данным разбиением на элементы. Определенный опыт можно приобрести на примерах, рассматриваемых в данной книге. Прежде всего рассматриваются простые задачи, для которых возможно точное решение.

Однородное поле напряжений

Если требуется найти точное решение для однородного поля напряжений, то, независимо от степени разбивки на элементы, решение методом конечных элементов абсолютно совпадает с точным решением. Этот факт является очевидным следствием формулирования задачи методом конечных элементов, однако в качестве первой проверки написанных машинных программ необходимо им воспользоваться.

Линейно изменяющееся поле напряжений. Очевидно, что в этом случае основное предположение постоянства напряжения внутри элементов означает, что решение может быть лишь приближенным. На рис. 7 изображен простой пример балки, на которую действует постоянный изгибающий момент при относительной грубой степени разбивки. Можно легко видеть, что осевое напряжение (σ_y), полученное с помощью метода конечных элементов, «берет в вилку» точные величины и, если величины постоянного напряжения связаны с центрами тяжести элементов и даны в виде графической линии, то наилучшим образом проведенная линия соответствует точному значению напряжения. Компоненты горизонтального и сдвигового напряжения снова отличаются от точных значений (которые просто равны нулю). Однако снова нужно подчеркнуть, что они отстоят от этих точных величин на равные незначительные промежутки. Если рассмотреть средние величины напряжений смежных элементов во внутренних узлах, можно увидеть, что их

значения достаточно близки к точным величинам. Средние величины на внешних поверхностях не обладают такой степенью приближения.

Общее уточнение величин напряжения, полученных с помощью средних величин в узлах, как показано на рис. 7, часто применяется на практике для улучшения приближенного решения.

Далее для большей точности можно производить весовое осреднение величин напряжения около поверхностей. При необходимости в интересах точности производится более тщательная разбивка.

Концентрация напряжения.

Более реальная контрольная задача изображена на рис. 8—10. Здесь рассматривается поле напряжения вокруг круглого отверстия в изотропном и анизотропном многослойном материале при условии однородных напряжений [6].

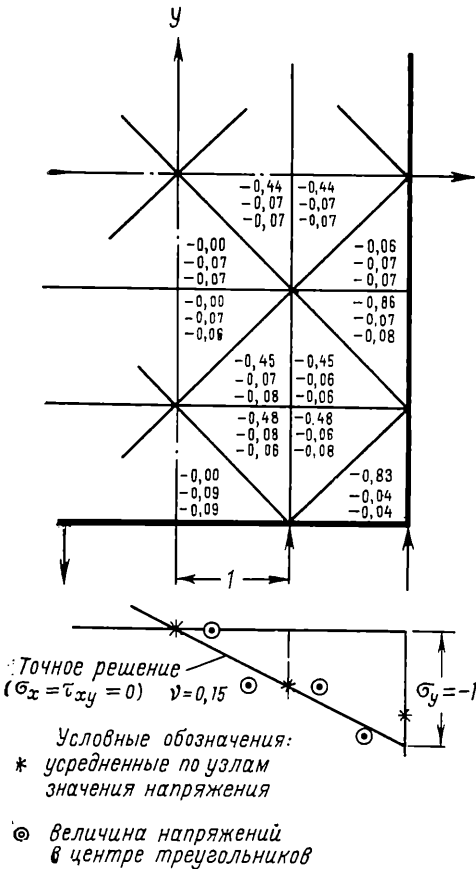


Рис. 7. Задача чистого изгиба балки, решаемая с помощью грубой разбивки на элементы треугольной формы

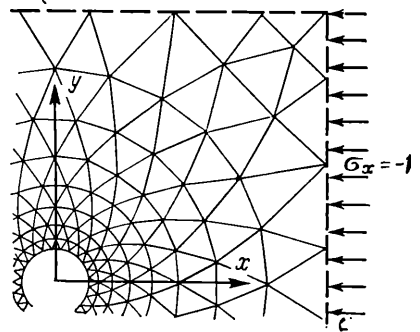


Рис. 8. Задача о распределении напряжения около круглого отверстия

Используется неравномерная разбивка на элементы, чтобы проводить более глубокое изучение области, в которой возможны высокие градиенты напряжения. Из рис. 10, где производится сравнение некоторых полученных результатов с точными решениями, можно убедиться в высокой степени точности результатов [3, 7].

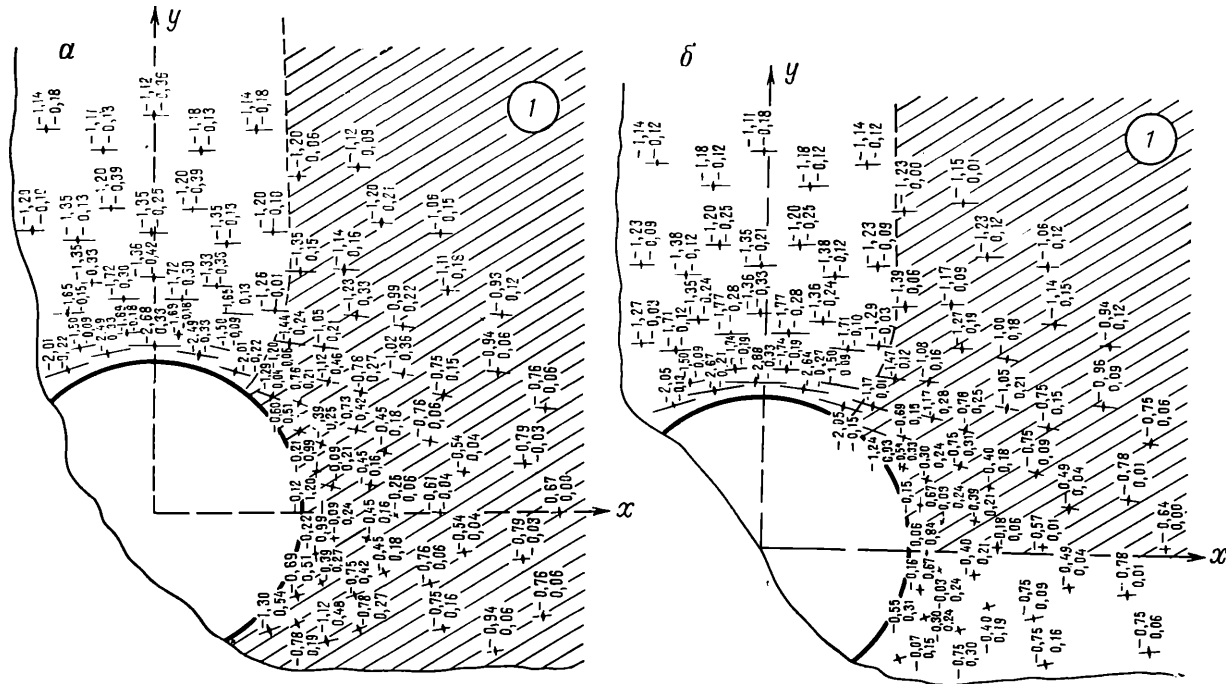


Рис. 9. Распределение главных напряжений около отверстия туннеля для случаев *a* (изотропный материал) и *б* (ортотропный материал). $E_x = E_1 = 1$; $E_y = E_2 = 3$; $\nu_1 = 0,5$; $\nu_2 = 0$; $g_{xy} = 0,42$; 1 — зона растяжения

16. Некоторые случаи практического использования

Очевидно, случаи практического применения этого метода безграничны, и уже в настоящее время метод конечных элементов вытесняет экспериментальную технику при решении плоских задач, так как он является высокоточным, недорогостоящим и гиб-

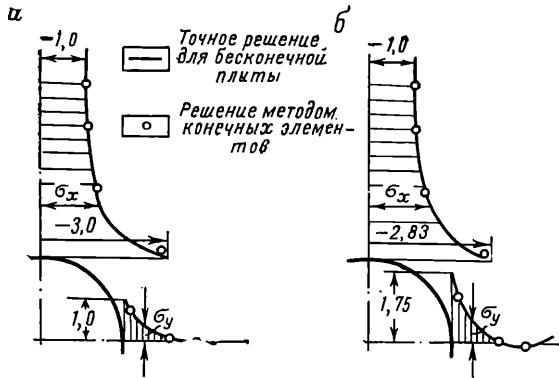


Рис. 10. Сопоставления результатов аналитического решения и расчета по методу конечных элементов для случаев а и б (см. рис. 9)

ким. К этому следует добавить, что этот метод упрощает исследование анизотропных материалов, действия тепловых напряжений и массовых сил. Ниже дается несколько примеров практического применения этого метода к сложным инженерным задачам.

Поле напряжения вокруг подкрепленного отверстия

В стальных камерах давления или самолетных конструкциях необходимо делать отверстия в жесткой оболочке. Проходящие коммуникации сами усиливают отверстие у краев и толщину оболочки, в результате чего уменьшается концентрация напряжения.

Исследование таких задач в плане плоских напряжений не представляет трудности. Элементы выбираются так, чтобы они соответствовали изменению толщины, и принимаются соответствующие величины, характеризующие это изменение толщины. Узкая полоса материала толстой оболочки около края отверстия может быть представлена или в виде специальных элементов балочного типа, либо в виде более простой стандартной программы с помощью тонких треугольных элементов обычного вида, которым задана соответствующая толщина. Такая процедура использовалась при решении задачи, показанной на рис. 11, где приведены некоторые результирующие напряжения около самого отверстия. Необходимо иметь в виду, что если рассматривается область относительно большой протяженности, целесообразно использовать разбиение с изменяющимся размером элементов.

Каньон из анизотропного материала, подвергаемый воздействию тектонического напряжения [6] (рис. 12). Рассматривается симметричный каньон под воздействием однородных горизонтальных напряжений. Материал перепластован, следовательно, является трансверсально-изотропным, а напряжения пластов изменяются от точки к точке. График напряжений показывает возникающую

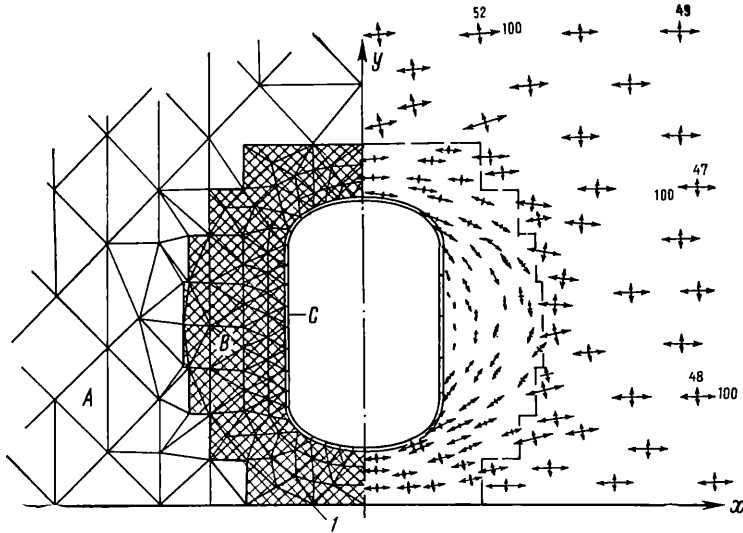


Рис. 11. Закрепленное отверстие в плите (однородное поле напряжения вблизи отверстия $\sigma_x=100$, $\sigma_y=50$. Толщина участков плиты A, B и C имеет отношение 1 : 3 : 23); l — узлы закреплены от смещений в направлении y

при этом область растягивающих напряжений. Это явление представляет значительный интерес для геологов и горных инженеров.

Плотина, подвергаемая внешнему и внутреннему давлению воды [8, 9] (рис. 13). Здесь рассматривается контрфорсная плотина на смешанном скальном основании. Неоднородное основание находится в условии плоской деформации, а сама плотина рассматривается как плита (плоское напряженное состояние) переменной толщины.

При решении задач внешнего нагружения и нагружения вследствие силы тяжести никаких трудностей не возникает. Следует отметить, что вычисление узловых нагрузок силы тяжести желательно автоматизировать. При рассмотрении порового давления требуется, однако, некоторое объяснение.

Хорошо известно, что в пористых материалах давление воды передается на сооружение в виде массовых сил

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

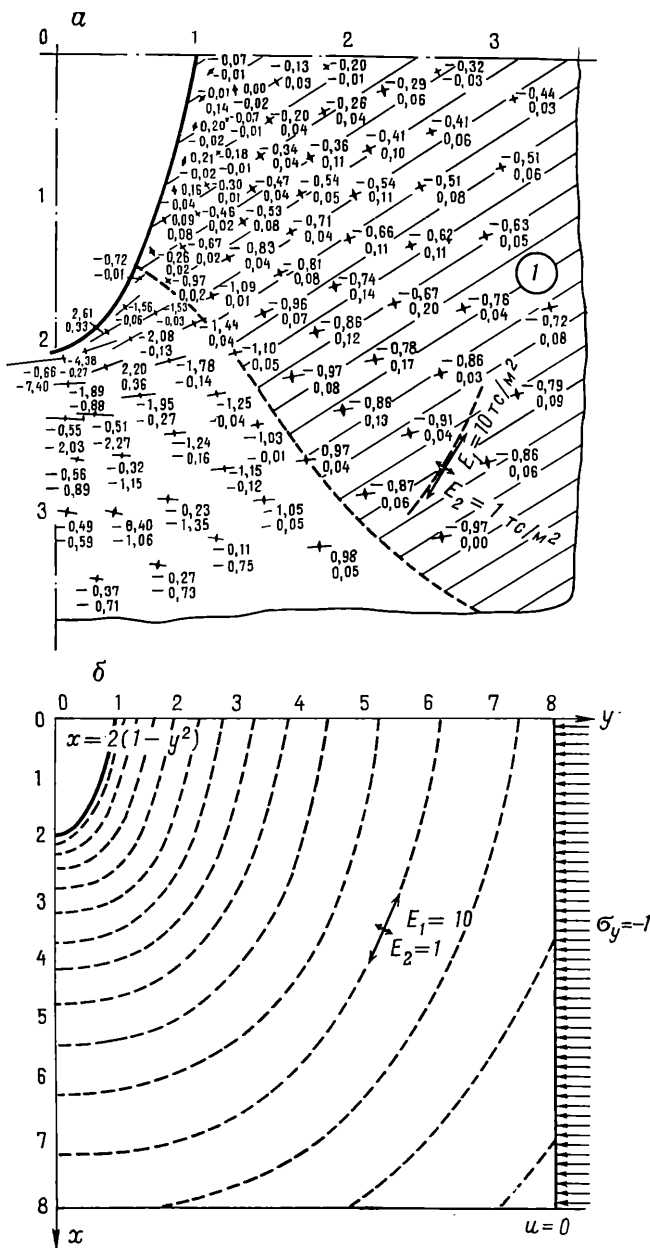


Рис. 12. Каньон с криволинейной формой пластов, подвергаемый воздействию горизонтальных тектонических напряжений (плоское деформированное состояние, 170 узлов, 298 элементов) (а) и исследуемая область (б): 1 — зона растяжения

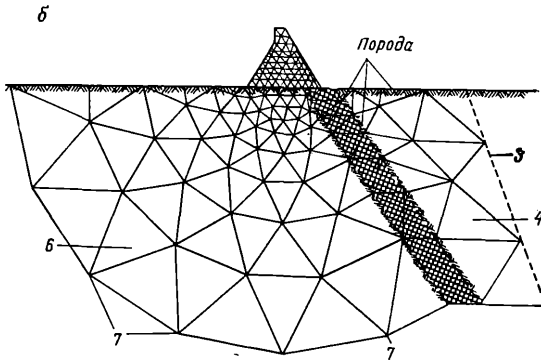
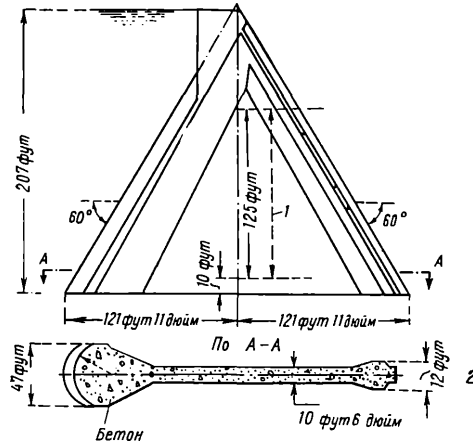


Рис. 13. Исследование напряжений в контрфорсной плотине. Тело плотины находится в плоском напряженном состоянии (модуль плотины E_c), а основание — в условиях плоской деформации

а — исследование участка контрфорсной плотины; б — участок основания, разбитый на конечные элементы: 1 — контрфорс переменной толщины, постепенно сужающийся кверху. На высоте 125 футов толщина составляет 9 футов. Постоянное изменение толщины — 1 фут на 82 фута 6 дюймов высоты; 2 — контрфорс по линии А—А; 3 — разрушение (зачемление отсутствует); 4 — гравий нарушенной структуры с $E = \frac{1}{10} E_c$; 5 — гравий с $E = \frac{1}{4} E_c$; 6 — аргиллит с $E = \frac{1}{2} E_c$; 7 — нулевые пере-

мещения

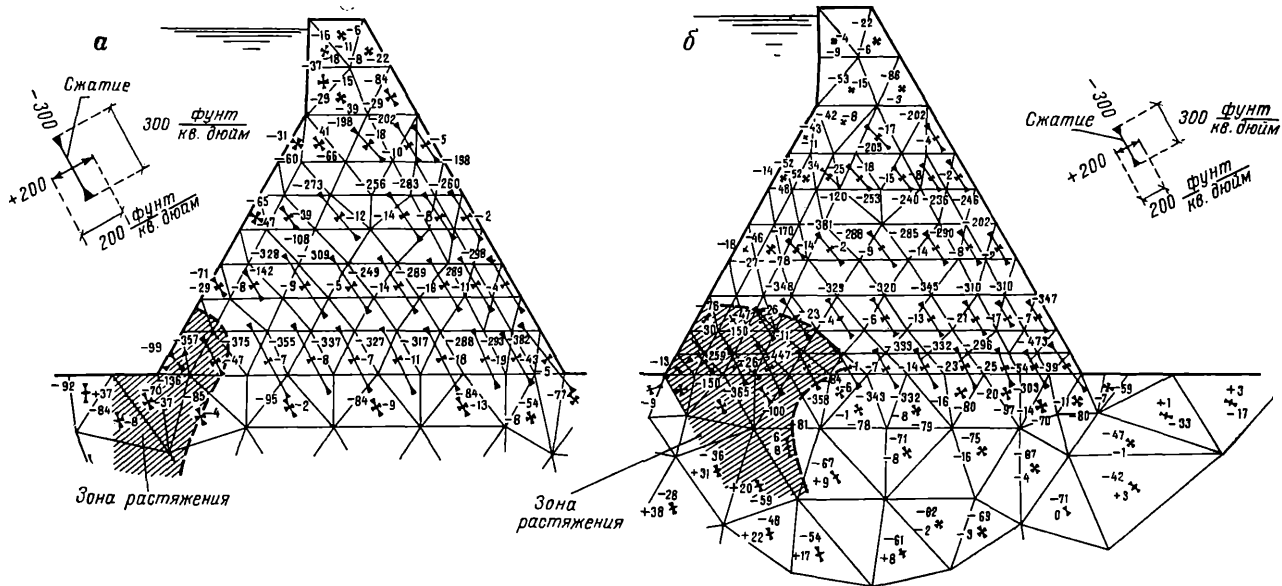


Рис. 14. Расчет напряжений контрфорсной плотины, изображенной на рис. 13. Представлены значения главных напряжений, вызываемых силами тяжести. Давление воды рассматривается:
 а — как внешняя нагрузка и б — как массовые силы, вызываемые поровым давлением (стрелка обозначает растяжение.
 На участках контакта основания со скалой необходимо прикладывать собственные напряжения скальной породы).

и что в этом случае внешнее давление можно не учитывать. Пороговое давление p является фактически потенциалом массовых сил, как это явствует из уравнения (III.36). На рис. 13 показаны разбивка участка на элементы и общее очертание плотины.

На рис. 14, а и б показаны напряжения силы тяжести (действующие только на плотину), являющиеся следствием давления воды, которая действует как внешняя нагрузка или как внутреннее поровое давление. Оба решения включают большие участки растяжения, но здесь нам важно увеличение напряжений вследствие второго условия.

Образование трещин

Растягивающие напряжения, о которых шла речь в предыдущем случае, приводят к образованию трещин в скале. Если после распространения такой трещины создается устойчивая ситуация,

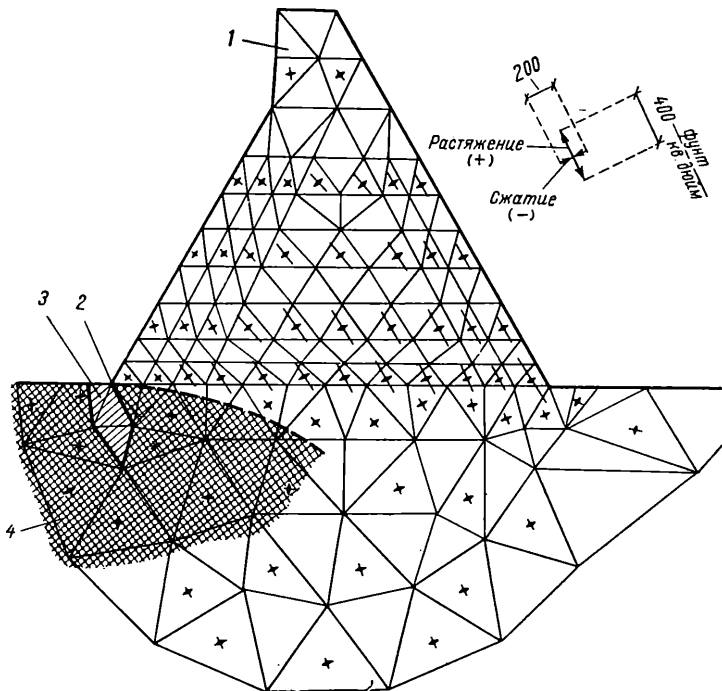


Рис. 15. Напряжения в контрфорсной плотине (Наличие трещины изменяет распределение напряжений. Система нагружения аналогична изображенной на рис. 14, б). Стрелка обозначает растяжение. Значения напряжений приведены без учета собственных напряжений скальной породы основания
1 — верхняя грань; 2 — участок растяжения; 3 — область трещины (материал рассматривается с $E=0$); 4 — участок растяжения; величина растяжения меньше, чем возможное начальное напряжение сжатия скальной породы

то состояние плотины можно считать безопасным. Эти трещины легко ввести в условие задачи, если модуль упругости принять равным нулю в выбранных элементах. Задача с клином, имеющим широкую трещину, показана на рис. 15, где можно видеть, что на протяжении всей трещины в теле плотины не появляется рас

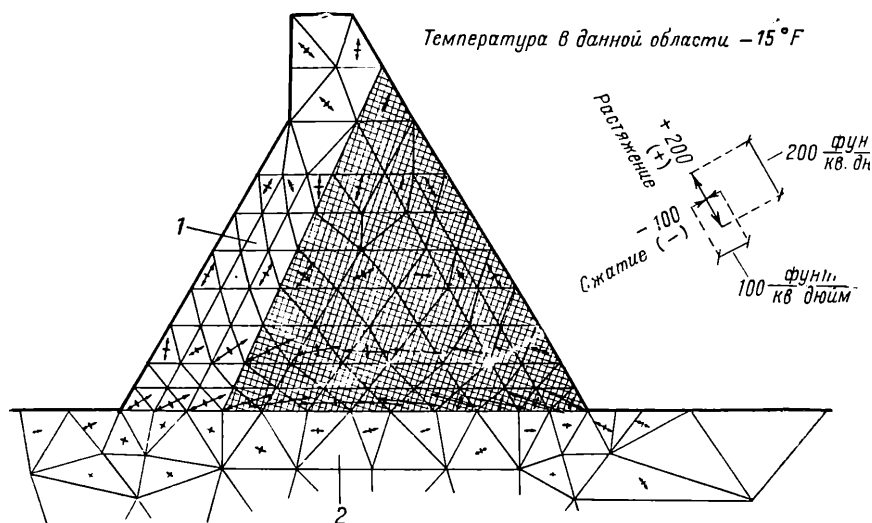


Рис. 16. Расчет напряжений контрфорсной плотины. Температурные напряжения, вызванные охлаждением заштрихованной области на $15^{\circ}F$ ($E=3 \times 10^6$, фунт/кв. дюйм; $\alpha=6 \times 10^{-6}$ $1^{\circ}F$)

1 — в этой области изменение температуры носит линейный характер; 2 — в основании сооружения изменение температуры не происходит

жение. Более тщательно исследование распространения трещин происходящего при этом перераспределения напряжений будет проводиться в главе XII.

Тепловые напряжения. В качестве примера вычислений тепловых напряжений приводится та же плотина в условии простого температурного распределения. Результаты исследования показаны на рис. 16.

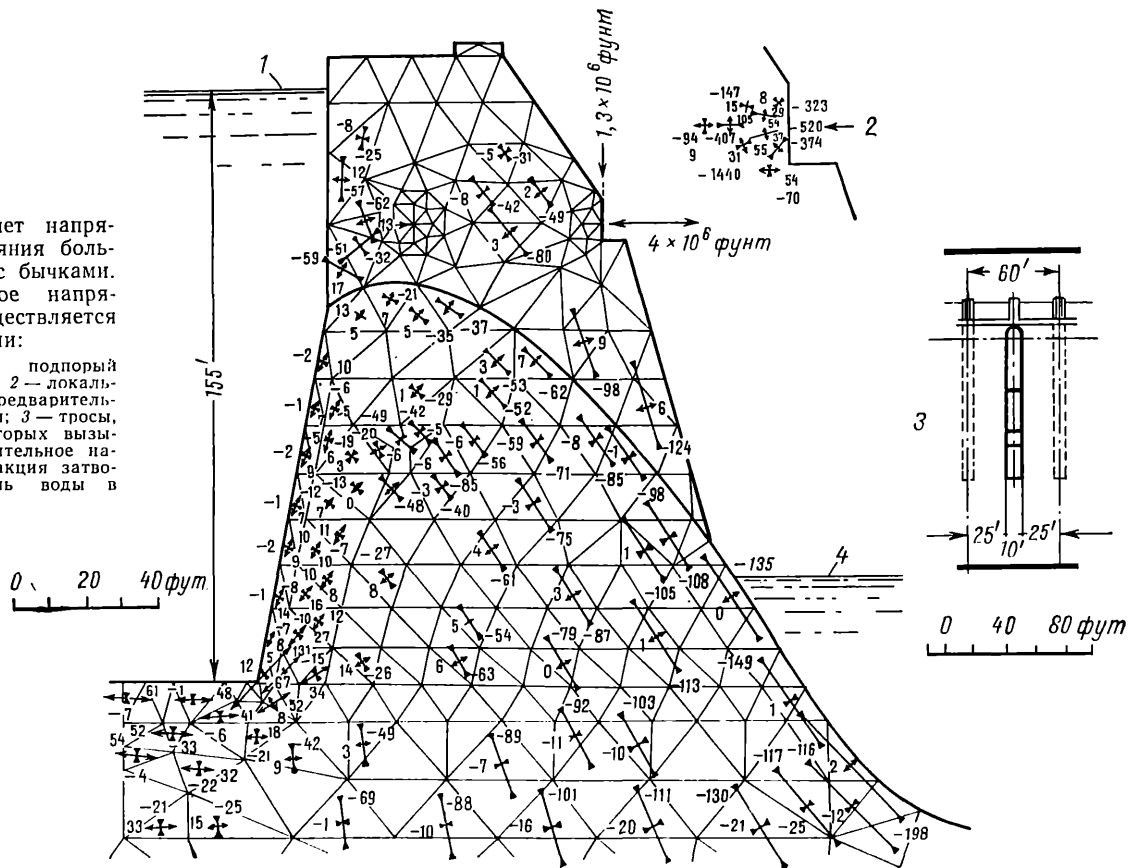
Гравитационные плотины. Лучшим примером применения метода конечных элементов может служить контрфорсная плотина.

Можно, однако, использовать этот метод и применительно к другим типам плотин, например, к гравитационным. На рис. 17 приведены расчеты большой плотины с бычками и затворами между ними. В этом случае вполне допустима возможность приближенного двумерного решения вблизи резкого изменения участка, т. е. там, где бычки соприкасаются с основным телом плотины; однако это ведет к местным ошибкам.

Здесь важно рассмотреть, как производится выбор размера элемента для изучения концентрации напряжения в анкерных к

Рис. 17. Расчет напряженного состояния большой плотины с бычками. Предварительное напряжение осуществляется тросами:

1 — нормальный опорный горизонт воды; 2 — локальное действие предварительного напряжения; 3 — тросы, с помощью которых вызывается предварительное напряжение; 4 — реакция затворов; 5 — уровень воды в нижнем бьефе



струкциях, общих полей напряжения в плотине и поведения оснований.

Линейное соотношение размера наибольшего и наименьшего элементов составляет порядка 30 к 1 (наибольшие элементы встраивающиеся в основании, не показаны на рисунке). Можно легко рассмотреть разнообразные другие случаи применения этого метода к техническим задачам.

17. Особый случай плоской деформации для «несжимаемого материала»

Необходимо отметить, что отношение, данное в уравнении (III.20) и характеризующее матрицу упругости $[D]$ для изотропных материалов, теряет силу, когда коэффициент Пуассона достигает величины 0,5, так как множитель в скобках растет до бесконечности. Простой способ разрешить эту трудность состоит в том чтобы вводить величины коэффициента Пуассона, близкие к 0,5, но не равные 0,5.

Опыт, однако, подсказывает, что в этом случае приближение становится менее точным. Другой способ был недавно предложен Неггман [10]. Этот способ основан на новой вариационной формулировке, поэтому за подробностями отсылаем читателя к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topper, Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, 23, pp. 805—23, 1956.
2. R. W. Clough, The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd A.S.C.E. Conf on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
3. S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, 2nd ed. McGraw-Hill, 1951.
4. S. G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Translation from Russian by P. Fern. Holden Day, San Francisco, 1963.
5. R. F. S. Hearmon, *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1961.
6. O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, and K. G. Stagg, Stresses in Anisotropic Media with particular reference to problems of rock mechanics, *J. Strain Analysis*, 1, pp. 172—82, 1966.
7. G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, 1968 (Translation from Russian.)
8. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, Buttress Dams on Compaction foundations, *Water Power*, 16, p. 193, 1964.
9. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, Stresses in Buttress Dams, *Water Power*, 17, p. 69, 1965.
10. L. R. Herrman, Elasticity equations for incompressible, or nearly incompressible materials by a variational theorem, *J. A.I.A.A.*, 3, p. 1896, 1965.

18. Вступление

Задача распределения напряжения в телах вращения (осесимметричные твердые тела) под воздействием осесимметричной нагрузки представляет значительный практический интерес. Математически эти задачи напоминают задачи плоскодеформированного и плосконапряженного состояния, так как и в этом случае решение будет двумерным (1.2). Вследствие симметрии два компонента смещения в любом плоском сечении тела вдоль оси симметрии полностью определяют деформацию, а следовательно, и напряжение. Такой поперечный разрез показан на рис. 18. Если r и z определяют соответственно радиальную и осевую координату точки, а u и v есть соответствующие смещения, то можно легко убедиться, что для определения смещений в показанном на рис. 18 треугольном элементе i, j, m используются те же функции смещения, что и в главе III.

Объем материала, связанный с элементом, будет теперь равен объему тела вращения, показанного на рис. 18, и все операции по интегрированию должны проводиться с учетом этого.

Было показано, что в задачах плосконапряженного или плоскодеформированного состояния внутренняя работа связана с тремя компонентами деформации, причем компонента напряжения, действующая нормально к координатной плоскости, не включалась вследствие нулевых значений либо соответствующей деформации или напряжения.

В осесимметричных задачах любые радиальные смещения автоматически вызывают деформацию в направлении по окружности и, так как напряжения в этом направлении не равны нулю, необходимо учитывать эту четвертую компоненту деформации и связанную с ней компоненту напряжения.

В этом заключается отличительная особенность решения осесимметричных задач. Алгебраические решения, приводимые в этой главе, могут показаться более громоздкими, хотя и здесь встречаются решения, соответствующие основной формуле, изложенной в главе II.

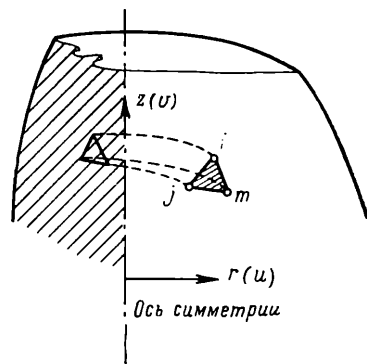


Рис. 18. Твердое тело с осевой симметрией

19. Характеристики элемента

19.1. *Функция смещения.* Рассматривая элемент треугольной формы (рис. 18) с узлами i, j, m , обозначаемыми в направлении против часовой стрелки, определяем смещение в узлах с помощью их двух компонент

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (IV.1)$$

и смещение элемента с помощью вектора

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (IV.2)$$

Очевидно, как и в пункте 19.1 для определения самих смещений внутри элемента, можно использовать линейный полином. Так как решение аналогично приведенному в главе III, мы не будем повторять его здесь. Поле смещения определяется с помощью уравнения (III.7)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m] \{\delta\}^e, \quad (IV.3)$$

$$N'_i = (a_i + b_i r + c_i z)/2\Delta,$$

где I есть единичная матрица 2×2 .

В вышеприведенной формуле

$$\left. \begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j; \\ b_i &= z_j - z_m = z_{jm}; \\ c_i &= r_m - r_j = r_{mj}, \end{aligned} \right\} \quad (IV.4)$$

и т. д. в циклическом порядке, где Δ — площадь треугольного элемента.

19.2. *Деформация (общая).* Как уже указывалось, теперь необходимо рассмотреть четыре компонента деформации, так как

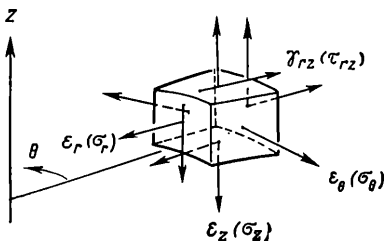


Рис. 19. Деформации и напряжения элементарного объема твердого тела с осевой симметрией

при деформации осесимметричных тел только эти четыре компонента отличны от нуля. На рис. 19 показаны и определены эти деформации и связанные с ними напряжения.

Определяемый ниже вектор деформации включает компоненты деформации и определяет их с помощью смещений в точке. Связанные с этим выражения не приводятся здесь в силу их очевидности.

Читатель, желающий получить полные формулировки, отсылается к работе [3].

Мы, таким образом, установили, что

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.5})$$

Используя функции смещения, определяемые из уравнений (IV.3) и (IV.4), получаем

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m] \{\delta\}^e, \quad (\text{IV.6})$$

где

$$[B_i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_i \\ a_i/r + b_i + c_i z/r, & 0 \\ c_i & b_i \end{bmatrix}.$$

Так как матрица B включает координаты r и z , деформации внутри элемента не будут постоянными, как в случае плосконапряженного и плоскодеформированного состояния. Это изменение есть результат присутствия члена e

Если в получаемых узловых смещениях u пропорционально r , все деформации будут действительно постоянны. Так как это будет единственное состояние смещения, совпадающее с условием постоянной деформации, очевидно, функция смещения удовлетворяет основному критерию, установленному в главе II.

19.3. Начальная деформация (температурная деформация). В основном можно рассмотреть 4 независимых компонента вектора начальной деформации

$$\{\epsilon\}_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_{z0} \\ \epsilon_{r0} \\ \epsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{rz0} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.7})$$

Хотя начальная деформация может изменяться внутри элемента, для нас удобнее рассматривать ее как постоянную. Наиболее частым вариантом начальной деформации можно считать температурное расширение.

Тогда для изотропного материала имеем

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (IV.8)$$

где θ^e есть среднее нарастание температуры внутри элемента, α — коэффициент теплового расширения.

Общий случай анизотропного состояния не рассматривается так как осевая симметрия в этих условиях существовать не может. Определенный практический интерес представляет задача с многослойным материалом, аналогичная задаче главы II, где плоскость изотропии перпендикулярна к оси симметрии (рис. 20).

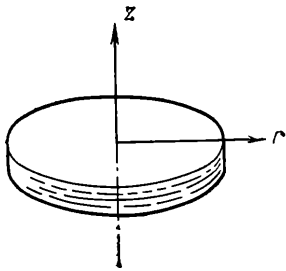


Рис. 20. Многослойный материал с плоскостью изотропии, нормальной к оси симметрии

В этом случае возможны два коэффициента расширения, один из них — в направлении оси z , а второй — в плоскости, перпендикулярной к оси, α_r .

Таким образом, начальная тепловая деформация принимает вид

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_z\theta^e \\ \alpha_r\theta^e \\ \alpha_r\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (IV.9)$$

Практические случаи, связанные с такими многослойными анизотропными материалами, могут встречаться при обработке деталей из фибргласса и триплекса.

19.4. Матрица упругости. Необходимо определить матрицу упругости $[D]$, которая связывает деформации $\{\varepsilon\}$ и напряжения $\{\sigma\}$,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}).$$

Сначала рассмотрим задачу с анизотропным многослойным материалом, тогда задача с изотропным материалом может быть представлена как частный случай.

Анизотропный многослойный материал (рис. 20).

Если ось z есть нормаль к поверхностям напластования, уравнение (III.22) снова для удобства, пренебрегая начальными деформациями, может быть представлено в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \sigma_z | E_2 - \nu_2 \sigma_r | E_2 - \nu_2 \sigma_\theta | E_2; \\ \varepsilon_r &= -\nu_2 \sigma_z | E_2 + \sigma_r | E_1 - \nu_1 \sigma_\theta | E_1; \\ \varepsilon_\theta &= -\nu_2 \sigma_z | E_2 - \nu_1 \sigma_r | E_1 + \sigma_\theta | E_1; \\ \gamma_{zr} &= \tau_{zr} | G_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.10})$$

Записывая

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \text{и} \quad \frac{G_2}{E_2} = m$$

и решая относительно напряжений, получаем

$$D = \frac{E_a}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2)} \times \begin{bmatrix} 1 - \nu_1^2 & \nu_2(1 + \nu_1) & \nu_2(1 + \nu_1) & 0 \\ n(1 - \nu_2^2) & \nu_1 + \nu_2^2 & & 0 \\ & n(1 - \nu_2^2) & & 0 \\ \text{симметрично} & & m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2\nu_2^2) & \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.11})$$

Для изотропных материалов матрица $[D]$ может быть получена, если принять

$$E_1 = E_2 = E, \quad \text{или} \quad n = 1$$

и

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu,$$

и используя хорошо известное отношение между постоянными упругости

$$\frac{G_2}{E_2} = \frac{G}{E} = m = \frac{1}{2(1 + \nu)}.$$

Подставляя в уравнение (IV.11), получаем

$$D = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{симметрично} & & & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.12})$$

19.5. Матрица жесткости. Матрица жесткости элемента ijm может быть вычислена в соответствии с общим соотношением, определяемым из уравнения (II.10). Помня о том, что объемный ин-

теграл должен быть взят по всему объему материала, мы будем иметь

$$[k]^e = 2\pi \int [B]^T [D] [B] r dr dz, \quad (IV.1)$$

где $[B]$ определяется из уравнения (IV.6), а $[D]$ — из уравнения (IV.11) или (IV.12) в зависимости от исследуемого материала.

В этом случае интегрирование не может быть проведено так же легко, как при решении задачи при плосконапряженном состоянии, так как матрица $[B]$ зависит от координат. Здесь имеются две возможности: во-первых, численное интегрирование, во-вторых, явное умножение и почленное интегрирование. Наиболее простой процедурой приближенного решения является определение $[B]$ для точки центра тяжести.

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_m)/3$$

и

$$\bar{z} = (z_i + z_j + z_m)/3.$$

В этом случае в качестве первого приближения мы будем просто иметь

$$[k] = 2\pi [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \bar{r} \Delta, \quad (IV.1)$$

где Δ — площадь треугольника. С помощью этой процедуры можно получить сравнительно точные результаты, хотя можно и пользоваться и более сложные методы численного интегрирования. При решении задач, рассматриваемых в данной главе, применяется метод явного и точного интегрирования, что позволяет и бежать посторонних ошибок¹.

Далее, как и в предыдущей главе, разбиваем матрицу жесткости на отдельные элементы (см. уравнения (III.28) — (III.30), определяя типичную матрицу жесткости 2×2 как

$$[k_{rs}] = 2\pi \int [B_r]^T [D] [B_s] r dr dz. \quad (IV.)$$

На этой стадии удобнее разбить матрицы $[B]$ на постоянные переменные части.

Так, например, мы можем записать

$$[B_i] = [\bar{B}_i] + [B'_i], \quad (IV.)$$

где $[\bar{B}_i]$ есть величина $[B_i]$ в центре тяжести, как это дано в уравнении (IV.14), а второй член показывает отклонение от этой величины. Можно легко убедиться, что это можно записать к

¹ Существует более точный метод численного интегрирования. Техника этого метода приводится в приложении V. В рассматриваемом случае этот метод имеет преимущества, так как интегралы содержат в себе члены, которые трудно численно определить, если отношения радиусов в различных узлах элемента стремятся к единице.

$$[B'_i] = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \\ 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \{(a_i + c_i z)/r - (a_i + c_i \bar{z})/\bar{r}\}/2\Delta. \quad (\text{IV.17})$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (IV.15) и отмечая, что

$$\int [B'_i] r dr dz = [0],$$

мы получаем

$$[k_{rs}] = [\bar{k}_{rs}] + [k'_{rs}], \quad (\text{IV.18})$$

где первый член тот же, что и в уравнении (IV.14), а второй член есть поправка, которую мы определяем из уравнения

$$[k'_{rs}] = \frac{2\pi}{(2\Delta)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int \{(a_r + c_r z)/r - (a_r + c_r \bar{z})/\bar{r}\} \times \\ \times \{(a_s + c_s z)/r - (a_s + c_s \bar{z})/\bar{r}\} r dr dz. \quad (\text{IV.19})$$

Если различные интегралы записать сокращенно с помощью условных знаков

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{1}{r} dr dz &= \Delta I_1; \\ \int \frac{z}{r} dr dz &= \Delta I_2; \\ \int \frac{z^2}{r} dr dz &= \Delta I_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.20})$$

то мы можем окончательно представить поправочный член как

$$[k'_{rs}] = \frac{\pi}{2\Delta} \begin{bmatrix} D_{33} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{a_r a_s (I_1 - 1/\bar{r}) + (a_r c_s + a_s c_r) (I_2 - \bar{z}/\bar{r}) + \\ + c_r c_s (I_3 - \bar{z}^2/\bar{r})\}. \quad (\text{IV.21})$$

Интегралы от I_1 до I_3 могут быть явно вычислены с помощью узловых координат. Некоторые подробности такого интегрирования даны ниже в примечании, которое может быть опущено при первом чтении.

Вычисление интегралов I_1 — I_3 .

Интегрирование по площади треугольника лучше всего произвести, если взять интеграл по площади, заключенной, например, под прямой *im* (см. заштрихованный участок рис. 21), и добавить

к нему интегралы, полученные с помощью соответствующей формулы для m до j и j до i . Уравнение прямой im запишется

$$z = A_{im} + B_{im}r,$$

где

$$A_{im} = \frac{r_m z_i - r_i z_m}{r_m - r_i}; \quad B_{im} = \frac{z_m - z_i}{r_m - r_i}.$$

Таким образом, интеграл под прямой im принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_m} \int_{z=0}^{z=A_{im}+B_{im}r} \frac{1}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_m} \frac{1}{r} (A_{im} + B_{im}r) dr = \\ &= A_{im} \log \frac{r_m}{r_i} + B_{im} (r_m - r_i). \end{aligned} \quad (a)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_m} \int_{z=0}^{z=A_{im}+B_{im}r} \frac{z}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_m} \frac{1}{r} \frac{(A_{im} + B_{im}r)^2}{2} dr = \frac{A_{im}^2}{2} \log \frac{r_m}{r_i} + \\ &+ A_{im} B_{im} (r_m - r_i) + \frac{B_{im}^2}{4} (r_m^2 - r_i^2) \end{aligned} \quad (b)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{r=r_i}^{r=r_m} \int_{z=0}^{z=A_{im}+B_{im}r} \frac{z^2}{r} dr dz &= \int_{r=r_i}^{r=r_m} \frac{1}{r} \frac{(A_{im} + B_{im}r)^3}{3} dr = \frac{1}{3} (A_{im})^3 \log \frac{r_m}{r_i} + \\ &+ (A_{im})^2 B_{im} (r_m - r_i) + \frac{A_{im} B_{im}^2}{2} (r_m^2 - r_i^2) + \frac{B_{im}^3}{9} (r_m^3 - r_i^3). \end{aligned} \quad (c)$$

Величины интегралов, взятых по всей площади треугольника, окончательно определяются как

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= A_{im} \log \frac{r_m}{r_i} + A_{mj} \log \frac{r_j}{r_m} - A_{ji} \log \frac{r_i}{r_j} = (A_{ij} - A_{im}) \log r_i + \\ &+ (A_{mj} - A_{ji}) \log r_j + (A_{im} - A_{mj}) \log r_m, \end{aligned} \quad (d)$$

члены B пропадают и

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= \{(A_{ji}^2 - A_{im}^2) \log r_i + (A_{mj}^2 - A_{ij}^2) \log r_j + (A_{im}^2 - A_{mj}^2) \log r_m\} / 2 + \\ &+ A_{im} B_{im} (r_m - r_i) + A_{mj} B_{mj} (r_j - r_m) + A_{ji} B_{ji} (r_i - r_j) + \\ &+ \{B_{im}^2 (r_m^2 - r_i^2) + B_{mj}^2 (r_j^2 - r_m^2) + B_{ji}^2 (r_i^2 - r_j^2)\} / 4, \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= \{(A_{ji}^3 - A_{im}^3) \log r_i + (A_{mj}^3 - A_{ij}^3) \log r_j + (A_{im}^3 - A_{mj}^3) \log r_m\} / 3 \\ &+ A_{im}^2 B_{im} (r_m - r_i) + A_{mj}^2 B_{mj} (r_j - r_m) + A_{ji}^2 B_{ji} (r_i - r_j) + \end{aligned}$$

$$+ \{A_{im}B_{im}^2(r_m^2 - r_i^2) + A_{mj}B_{mj}^2(r_j^2 - r_m^2) + A_{ji}B_{ji}^2(r_i^2 - r_j^2)\}/2 + \\ + \{B_{im}^3(r_m^3 - r_i^3) + B_{mj}^3(r_j^3 - r_m^3) + B_{ji}^3(r_i^3 - r_j^3)\}/9. \quad (f)$$

Хотя радиальные смещения всегда будут нулевыми на оси симметрии, а при окончательном соединении соответствующие строки и столбцы будут вычеркиваться, во всех случаях удобнее использовать общее выражение для вычисления жесткости элемента.

Из приведенных выражений для интегралов следует, что если какой-либо радиус имеет нулевое значение, соответствующий логарифм становится бесконечным, и наступает разрыв вычислительного процесса.

Если r_i стремится к нулю, соответствующий член в интегралах от I_1 до I_3 будет иметь форму

$$(A_{ji}^n - A_{im}^n) \log r_i = \left\{ \frac{(r_i z_j - r_j z_i)^n z_i}{(r_i - r_j)^n} - \right. \\ \left. - \frac{(r_m z_i - r_i z_m)^n}{(r_m - r_i)^n} \right\} \log r_i \quad (g) \\ n = 1, 2, 3$$

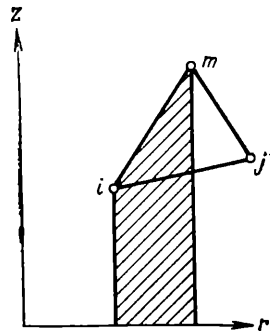


Рис. 21. Пределы интегрирования

и становится равным произведению $0 \times \infty$, если $r_i = 0$. Предел этого члена может быть установлен с помощью правила Лопиталья. Действительно, этот предел всегда равен 0. Поэтому нужно просто опустить логарифмические члены в случае, если какой-нибудь радиус стремится к нулю. Если две радиальные координаты в узлах будут равными, снова возникают затруднения, так как оба члена A и B становятся бесконечными. Однако, как это ясно из рис. 21, интегрирование для таких прямых провести невозможно. Поэтому просто необходимо приравнять соответствующие коэффициенты A и B нулю, т. е. если

$$r_i = r_m, \text{ то } A_{im} = B_{im} = 0,$$

и снова можно использовать основную процедуру.

19.6 Внешние силы в узлах. При решении задач плосконапряженного и плоскодеформированного состояния вопрос определения внешних нагрузок был настолько очевидным, что не нуждался в пояснениях. В данном случае, однако, важно понять, что узловые силы представляют объединенное действие силы по всей длине окружности, образующей узел элемента. Об этом уже упоминалось при интегрировании выражения, определяющего жесткость элемента, так как подобное интегрирование производилось по всему кольцу.

Так, если \bar{R} есть радиальная компонента силы на единицу длины окружности узла радиуса r , внешняя «сила», которая вводится для расчета, есть $2\pi r \bar{R}$.

Аналогично, в осевом направлении для представления объединенного воздействия осевых сил получим $2\pi r\bar{Z}$.

19.7. Узловые силы, возникающие под воздействием первоначальной деформации. Из уравнения (II.9) получаем снова

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = -2\pi \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} r dr dz, \quad (IV.22)$$

откуда, отмечая, что $\{\varepsilon_0\}$ постоянно, имеем

$$\{F_i\}_{\varepsilon_0} = -2\pi \left(\int [B_i]^T r dr dz \right) [D] \{\varepsilon_0\}. \quad (IV.23)$$

Интегрирование производится таким же образом, как при определении жесткости. Легко увидеть, что и в данном случае можно использовать приближенное выражение

$$\{\bar{F}_i\} = -2\pi [\bar{B}_i]^T [D] \{\varepsilon_0\} \bar{r}\Delta \quad (IV.24)$$

вместе с корректирующим членом.

Таким образом,

$$\{F_i\} = \{\bar{F}_i\} + \{F_i'\}. \quad (IV.25)$$

Однако корректирующий член окажется равным нулю, так как

$$\{F_i'\} = 2\pi \left(\int [B_i'] r dr dz \right) [D] \{\varepsilon_0\} = 0.$$

Поэтому на самом деле мы имеем

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = -2\pi [\bar{B}]^T [D] \{\varepsilon_0\} \bar{r}\Delta. \quad (IV.26)$$

19.8. Распределенные массовые силы. При рассмотрении осесимметричных задач часто необходимо учитывать распределенные массовые силы, как, например, силы тяжести (действующие в направлении оси z), центробежные силы вращающихся частей механизма или поровое давление.

Пусть эти силы, действующие на единицу объема материала в направлении r и z , соответственно будут обозначены

$$p = \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix}. \quad (IV.27)$$

С помощью основного уравнения (II.9) получаем

$$\{F\}_p^e = -2\pi \int [N]^T \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} r dr dz,$$

или, расчленив,

$$\{F_i\}_p = -2\pi \int \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix} N_i r dr dz. \quad (IV.28)$$

Используя сдвиг осей подобно тому, как это производилось в пункте 14.7, легко показать, что если массовые силы постоянны, то в первом приближении мы получим

$$\{\bar{F}_i\}_p = \{\bar{F}_j\}_p = \{\bar{F}_m\}_p = -2\pi \left\{ \frac{R}{Z} \right\} \bar{r} \Delta / 3. \quad (IV.29)$$

Хотя это приближение не является точным, остаточный член будет уменьшаться с уменьшением размеров элемента, и, так как этот член является саморегулирующим, он не будет давать существенных ошибок. Очевидно, в этом случае возможно произвести точное интегрирование. Если массовые силы выражены с помощью потенциала так, как это было сделано в пункте 14.9, т. е.

$$R = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (IV.30)$$

и если этот потенциал линейно определяется с помощью его узловых величин, то можно использовать выражение, эквивалентное уравнению (III.40) с той же степенью приближения. Во многих задачах массовые силы изменяются пропорционально r . Например, для вращающихся механизмов

$$R = \omega^2 \rho r, \quad (IV.31)$$

где ω есть угловая скорость, а ρ — плотность материала. В этом случае уменьшается точность при решении уравнения (IV.29), и для получения лучших результатов необходимо явное интегрирование.

19.9. Вычисление напряжений. Как явствует из уравнений (IV.5) и (IV.6), напряжения в этом случае изменяются по всему элементу. Целесообразно определить среднее напряжение в центре тяжести элемента. Матрица напряжений, полученная из уравнений (IV.6) и (II.3), даст, как обычно,

$$\{\bar{\sigma}\}^e = [D] [\bar{B}] \{\delta\}^e - [D] \{\epsilon_0\}.$$

Можно заметить, что происходит некоторое колебание величин напряжений в различных элементах, поэтому наибольшая точность может быть достигнута при осреднении напряжений в узлах. Дальнейшее улучшение точности решения будет обсуждаться в главе V.

20. Некоторые иллюстративные примеры

Контрольные задачи наподобие задачи о цилиндре, находящемся под воздействием постоянного осевого или радиального напряжения, дают решения, которые совпадают с точными. Это является еще одним свидетельством того, что функция смещения воспроизводит условия постоянной деформации. Примером, когда возможно точное решение и когда возникающие градиенты напря-

жения имеют почти линейную форму, может служить задача о сфере, которая испытывает внутреннее давление.

На рис. 22, а показаны напряжения в центре масс, полученные при грубом разбиении. Следует обратить внимание на колебание полученных величин напряжения около точных значений. (Эти

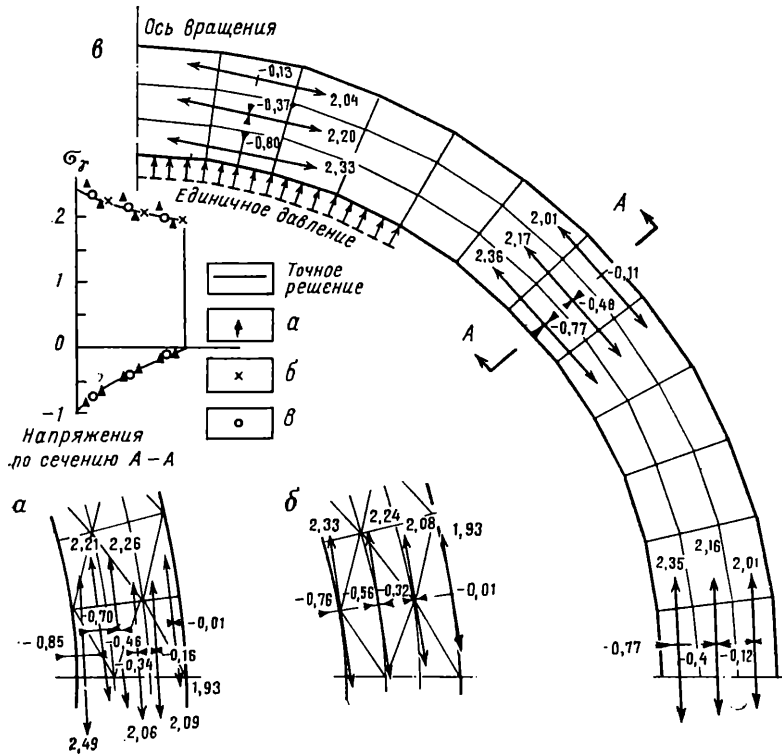


Рис. 22. Напряжения в сфере, вызываемые действием внутреннего давления (коэффициент Пуассона $\nu=0,3$):

а — напряжения, относящиеся к центру тяжести при разбишке на треугольные элементы; б — средние напряжений в узловых точках при разбишке на треугольные элементы; в — система четырех угловых элементов, полученная осреднением соседних треугольных элементов

колебания еще более ощутимы при больших величинах коэффициента Пуассона, хотя точное решение и не зависит от этого). На рис. 22, б показано более точное приближение, полученное от осреднения напряжений в узловых точках, а на рис. 22, в, где использовались методы осреднения, обсуждаемые в главе V, точность приближения еще выше. Близкое согласование с точным решением даже при грубой разбишке на элементы, используемой в этих примерах, указывает на возможность точного решения. Смещение в узлах по сравнению с точными величинами показано

на рис. 23. На рис. 24 вычислены температурные напряжения такой же сферы в условиях стационарного теплового потока. И снова сравнение с точным решением показывает высокую степень приближения.

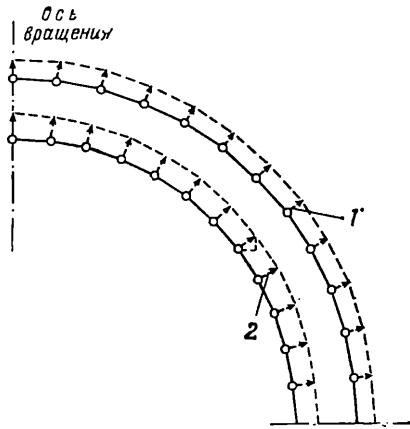


Рис. 23. Смещения на внутренней и внешней поверхностях сферы в условиях нагружения, соответствующих рис. 22:

1 — величина, вычисленная по методу конечных элементов — 5,27; величина, полученная по точному решению — 5,19; 2 — величина, вычисленная по методу конечных элементов — 6,3; величина, полученная по точному решению — 6,34

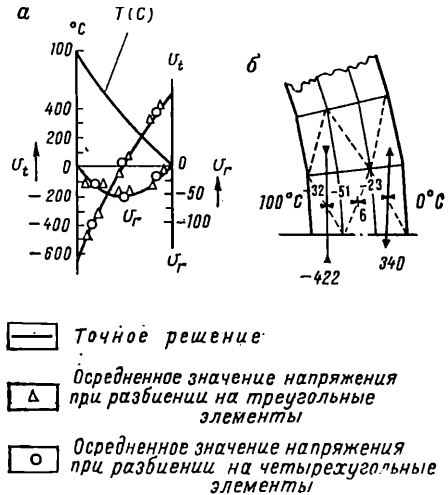


Рис. 24. Температурные напряжения в сфере в условиях стационарного теплового потока (температура внутреннего контура сферы 100°C , температура наружного контура 0°C)
 а — осредненные значения напряжений для четырехугольных элементы; б — измененные температуры и напряжения по радиусу

21. Практические приложения

Ниже приводятся два примера практического использования программы для осесимметричного распределения напряжения.

Напорный резервуар реактора из предварительно напряженного бетона

На рис. 25 показано распределение напряжения в относительно простом напорном резервуаре. Вследствие симметрии мы рассматриваем только одну половину резервуара, а представленные здесь результаты относятся к компонентам напряжения, вызываемого внутренним давлением. При исследовании предварительно напряженных тросов можно получить такие же результаты, если ввести в расчеты соответствующие величины узловых нагрузок, вызываемых этими тросами.

Масштаб напряжения
(стрелка обозначает
растяжение)

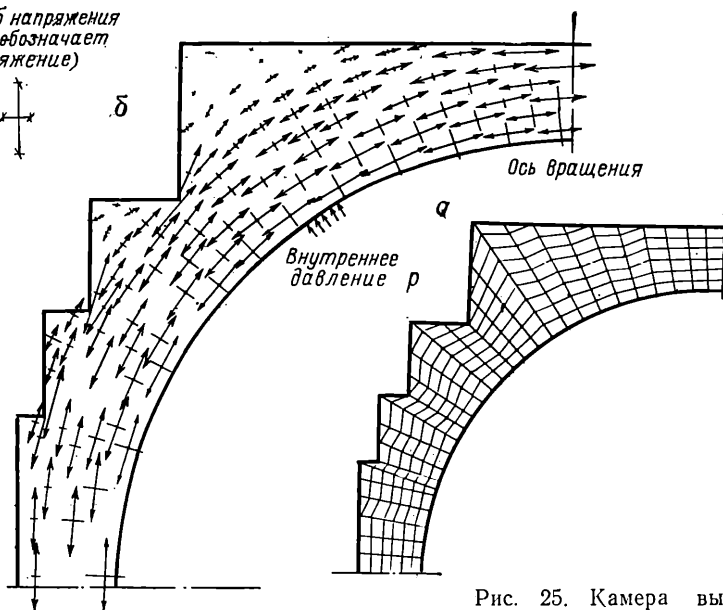


Рис. 25. Камера высокого давления реактора

a — разбиение на четырехугольные элементы, произведенное на ЭЦВМ; *б* — напряжения, вызываемые внутренним давлением p постоянной интенсивности. Направления равных значений напряжений вычерчены на графической приставке ЭВМ. Решение основано на осреднении величин напряжений при разбишке на четырехугольные элементы. Коэффициенты Пуассона $\nu=0,15$.

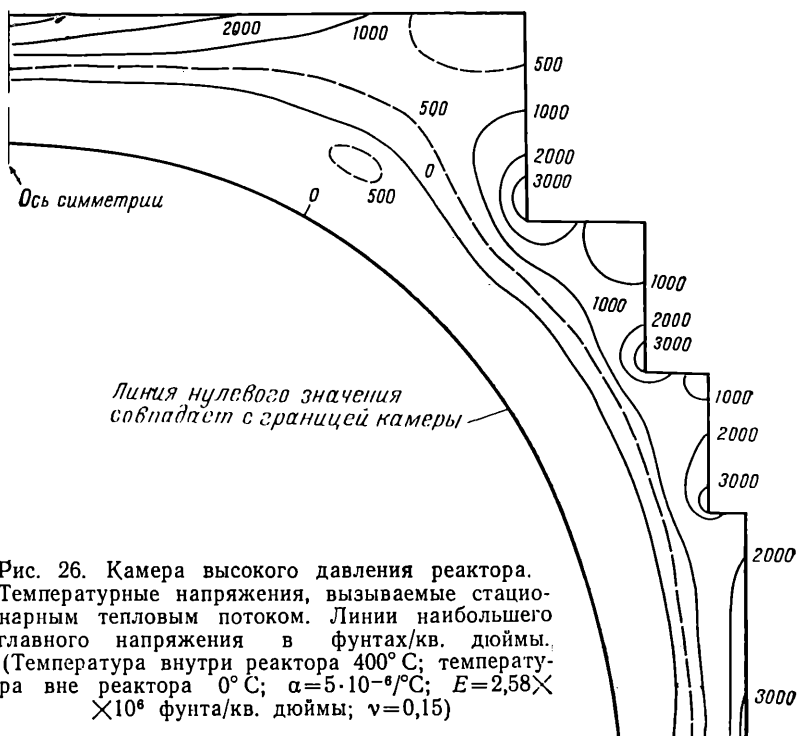


Рис. 26. Камера высокого давления реактора. Температурные напряжения, вызываемые стационарным тепловым потоком. Линии наибольшего напряжения в фунтах/кв. дюймы. (Температура внутри реактора 400°C ; температура вне реактора 0°C ; $\alpha=5 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$; $E=2,58 \times 10^6$ фунта/кв. дюймы; $\nu=0,15$)

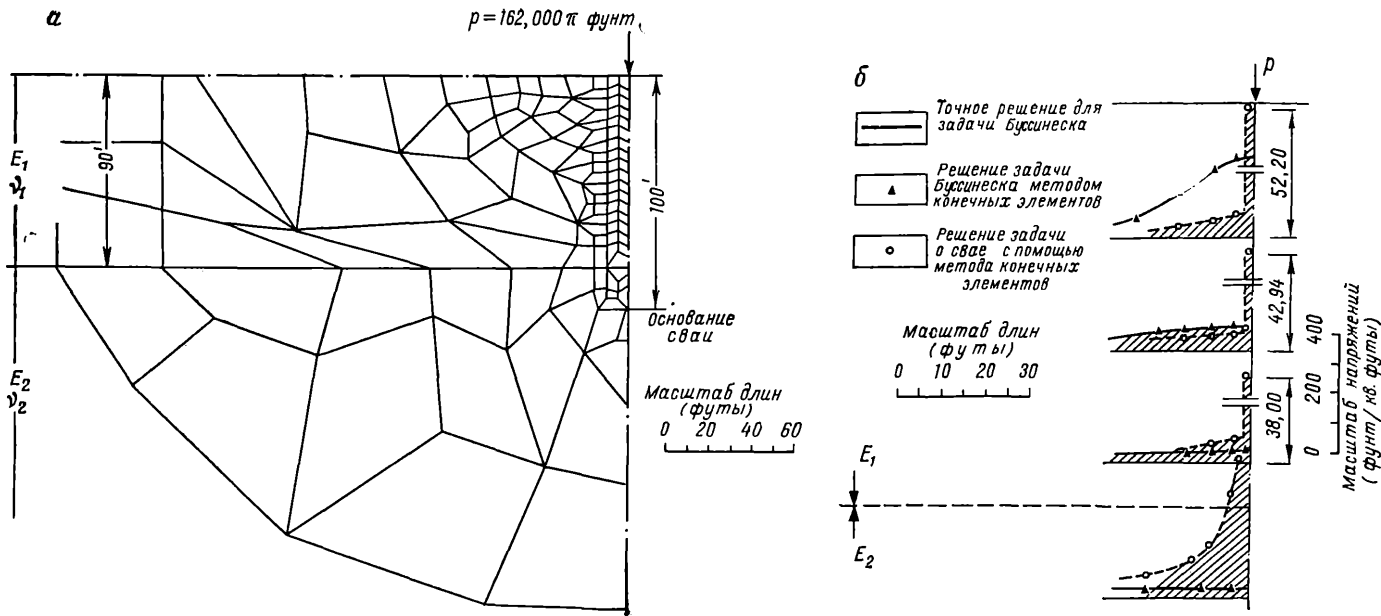


Рис. 27. Свая в двухслойном грунте:

a — нерегулярное разбиение области на элементы и данные для задачи: $E_{\text{сваи}} = 600$; $\nu_{\text{сваи}} = 0,25$; радиус сваи $= 1,5'$; $E_1 = 1$; $\nu_1 = 0,35$; $E_2 = 40$; $\nu_2 = 0,30$; b — свая в двухслойном грунте. На схемах приводятся эпюры вертикальных напряжений, действующих на горизонтальные участки сваи. Дано также схематическое решение задачи Буссинеска при условии $E_1 = E_2 = E_{\text{сваи}}$ и сравнение полученных данных с точными величинами

На рис. 26 показаны линии равных главных напряжений, вызываемых стационарным тепловым потоком. Тепловое состояние вызывается установившимся тепловым потоком и определяется методом конечных элементов, как это описывается в главе X.

Свайное основание. На рис. 27 показано распределение напряжений вокруг свайного основания, включающего два различных слоя. Эта неоднородная задача не представляет трудности и решается посредством стандартной программы.

22. Несимметричное нагружение

Метод, описанный в этой главе, может быть распространен на задачи с несимметричным нагружением. Если изменение нагрузки по периферии можно выразить в круговых гармонических функциях, то при решении все еще возможно сосредоточиться на одном осевом участке, хотя число степеней свободы в этом случае увеличивается до трех. Более подробно этот процесс описывается в главе IX в связи с осесимметричными оболочками, поэтому здесь он не рассматривается. Полное его описание приводится в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. W. Clough, chapter 7, Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
2. R. W. Clough and Y. Rashid, Finite element analysis of axisymmetric solids, Proc. A.S.C.E., 91, EM. 1, p. 71, 1965.
3. S. Timoshenko and J. H. Goodier, Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. E. L. Wilson, Structural analysis of axisymmetric solids, J.A.I.A.A., v. 3, pp. 2269—74, 1965.

НЕКОТОРЫЕ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

23. Вступление

Плоские задачи, которые рассматривались в главах III и IV с помощью элементов треугольной формы, могут решаться также и с помощью элементов другой полигональной формы. Можно, например, использовать четырехугольные элементы, среди которых прямоугольные элементы представляют частный случай. Если для таких четырехугольных элементов будет выбрана соответствующая функция смещения, то для данного числа узлов точность решения значительно увеличивается, так как большее число степеней свободы дает лучшее приближение величин смещений внутри элемента. Четырехугольники произвольной формы допускают введение любой граничной формы и позволяют изменять размеры элемента, сохраняя при этом преимущества треугольной формы элемента. Главным возражением против использования четырехугольных элементов могут быть арифметические трудности и в связи с этим значительное увеличение вычислительного времени при определении характеристики элемента.

Это можно считать недостатком последней формулы, представленной в этой главе.

Первой задачей, рассматриваемой здесь, является определение жесткости четырехугольного элемента с помощью формул для треугольного элемента. Поэтому она не может точно характеризовать новую форму элемента. Следующая ступень — использование элементов с шестью узлами.

Здесь будет показано, что подобные элементы позволяют использовать полный квадратичный полином, не ограничиваясь линейным изменением всех компонентов напряжения.

Если рассматриваются треугольные элементы с тремя дополнительными узлами, взятыми вдоль его сторон, то условие непрерывности соблюдается автоматически.

24. Характеристики четырехугольных элементов, определенные с помощью треугольных элементов

Как показано на рис. 28, производя соединение соседних треугольников, мы можем рассматривать любую разбивку на треугольники как четырехугольное разбиение. Жесткость типичного четырехугольника может быть вычислена сложением величин жесткости двух соседних треугольников. Если теперь предстоит записать условия любой задачи, рассмотренной в главах III—IV,

с помощью таких четырехугольных элементов, то, хотя последовательность вычисления изменится, окончательные уравнения узловых смещений, а следовательно, результаты смещения останутся теми же самыми. Единственное преимущество этой вычислительной процедуры заключается в том, что количество входных данных уменьшается, так как число самих элементов сократится наполовину. Описанное выше комбинирование треугольников представляет, однако, значительное преимущество при нахождении средних величин напряжения. При постоянстве распределения деформации внутри треугольника и размещения постоянных величин к центру тяжести элемента происходит, как уже отмеча-

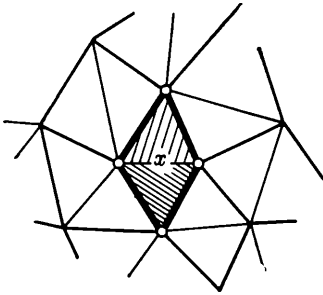


Рис. 28. Четырехугольный элемент, полученный в результате соединения двух треугольников

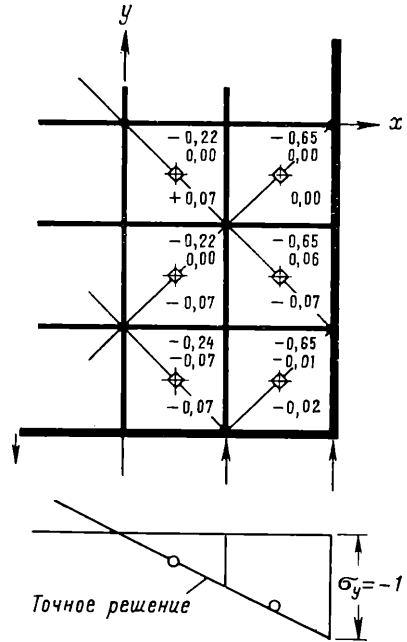


Рис. 29. Решение задачи чистого изгиба (см. рис. 7) с помощью осреднения напряжений в центре квадратных элементов. В каждом элементе напряжения перечислены в следующей последовательности:
 $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$

лось, некоторое колебание величин напряжения с возникновением больших градиентов напряжения. Если теперь осреднить два постоянных напряжения в треугольнике и отнести к центру тяжести четырехугольников, то получим значительное улучшение в представлении поля напряжения. Сравнение рис. 29, где проводится такое осреднение для задачи изгиба балки, иллюстрируемой на рис. 7, свидетельствует о том, что произошло значительное выравнивание напряжений и улучшение точности, даже при грубой разбивке. При этом важно, чтобы площади двух треугольников, в которых происходит осреднение напряжений, были бы приблизительно равными. Некоторые дополнения программы позволяют производить взвешивание напряжений пропорционально площади

треугольников. На рис. 22—25 (стр. 64—66) использовался как раз такой метод осреднения — сглаженное поле напряжений свидетельствует о его преимуществах.

Возможен другой способ комбинирования треугольников для определения характеристик четырехугольника. Любой четырехугольник, как показано на рис. 30, *a* и *b*, может быть разбит на два треугольника двумя способами. Если теперь определить жесткость элемента осреднением величин жесткости элементов, образованных по методам *a* и *b*, мы получим улучшенную характеристику жесткости, которая теперь не будет идентична характеристике соответствующей разбивки элемента на треугольники. Возникают вопросы о сходимости и точном значении определенного таким способом процесса. В обоих случаях легко дать ответ. Рассмотрим решение при разбивке каждого четырехугольника на треугольники одной системы. Такое решение будет сходиться при уменьшении размеров разбиваемых элементов, и поэтому мы можем записать

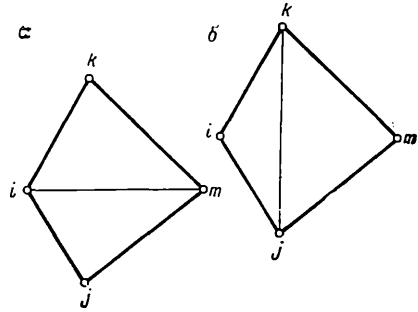


Рис. 30. Свойства элемента, полученные методом осреднения двух типов разбивки четырехугольных элементов на треугольные

$$[K]_1 \{w\} = \{F\} + \{e\}_1, \quad (V.1)$$

где $[K]_1$ — объединенная матрица жесткости всех треугольников $\{w\}$ — вектор истинного смещения, $\{F\}$ — вектор внешней нагрузки и, наконец, $\{e\}_1$ — погрешность, величина которой уменьшается при увеличении числа разбиений.

Таким же образом разбивка каждого четырехугольника на треугольники другой системы дает выражение

$$[K]_2 \{w\} = \{F\} + \{e\}_2, \quad (V.2)$$

где $\{e\}_2$ снова уменьшается до нуля.

Складывая уравнения (V.1) и (V.2) и разделив на 2, получаем

$$\frac{1}{2} ([K]_1 + [K]_2) \{w\} = \{F\} + \frac{1}{2} (\{e\}_1 + \{e\}_2), \quad (V.3)$$

где $\frac{1}{2} ([K]_1 + [K]_2)$ — матрица жесткости, получаемая осреднением.

В результате получаем сходящееся решение по уравнению (V.3). Так как число комбинаций треугольных элементов, получаемых в результате разбивки каждого четырехугольного

элемента, на две группы треугольников, очень велико, можно вывести следующее:

a — решение будет сходящимся;

b — точность результата будет больше, чем худшая комбинация треугольных элементов (но меньше, чем лучшая комбинация).

На практике использование формул четырехугольной разбивки дает незначительные преимущества перед определенной единой комбинацией треугольников.

25. Выбор функции формы для прямоугольника

Здесь мы рассматриваем прямоугольный элемент, так как он может использоваться в определенных практических задачах и, что особенно важно на данном этапе, позволяет получить простые математические формулы. Очевидно, возможности его применения

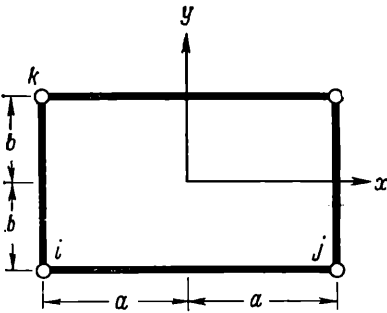


Рис. 31. Прямоугольный элемент

ограничены, но, как мы увидим, имеются некоторые пути для обобщений к элементу произвольной четырехугольной формы.

В треугольных элементах каждый компонент движения определялся с помощью трех узловых величин. При этом, используя представление при помощи полиномов, допускают линейное изменение перемещений с тремя неопределенными постоянными (III.3) или тремя функциями формы (III.7). В четырехугольном элементе четыре узловые

величины позволяют ввести в полином четвертую постоянную, в результате чего функции формы в большей степени отражают истинную деформацию. Выбор четвертого члена полинома не является явным, поэтому в качестве четвертого члена могут быть представлены разные квадратичные члены.

Однако, если вводится условие непрерывности смещения, то возможность выбора становится более ограниченной.

Рассмотрим четырехугольный элемент $ijmk$ на рис. 31.

Если поле смещения непрерывно между смежными элементами, каждый компонент смещения должен линейно изменяться вдоль сторон элементов. В таком случае совпадения смещений в узлах будут автоматически требовать совпадения во всех промежуточных точках. Поэтому выражение полинома ограничивается включением членов, имеющих такое линейное изменение, при котором координаты x или y будут постоянными.

Например, компонент смещения u может быть записан как

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy. \quad (V.4)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются тем же способом, как и при выводе уравнения (III.7), т. е. одновременно записываются четыре уравнения с узловыми величинами u , а координаты заменяются.

В случае, если точка начала координат взята в центре элемента, показанного на рис. 31, решая, мы можем записать

$$u = \frac{1}{4ab} \{ (a-x)(b-y)u_i + (a+x)(b-y)u_j + (a+x)(b+y)u_m + (a-x)(b+y)u_k \}, \quad (\text{V.5})$$

где $2a$ и $2b$ есть две стороны четырехугольника. Если использовать безразмерные координаты

$$x' = x/a \text{ и } y' = y/b,$$

то получаем

$$u = \frac{1}{4} \{ (1-x')(1-y')u_i + (1+x')(1-y')u_j + (1+x')(1+y')u_m + (1-x')(1+y')u_k \}. \quad (\text{V.6})$$

Выражение, подобное уравнениям (III.7) или (IV.3), могут быть теперь записаны как

$$\{f\} = (IN'_i, IN'_j, IN'_m, IN'_k) \{\sigma\}^e,$$

где

$$N'_i = \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y) = \frac{1}{4} (1-x')(1-y') \quad (\text{V.7})$$

и т. д., а I — единичная матрица 2×2 .

Начиная с этого момента и далее, все операции, описанные в главах III и IV, могут быть повторены таким же образом для получения соответствующих матриц жесткости и напряжений. Теперь даже в случае плоского деформированного состояния деформация не будет постоянной внутри элемента. Однако простая форма и пределы интегрирования делают алгебраические вычисления сравнительно несложными [1, 2]. Подробности этого метода здесь не рассматриваются, так как практическое применение четырехугольных элементов несколько ограничено. Читателю предоставляется вывести самому соответствующие выражения для проверки его понимания общего процесса.

26. Выбор функции формы для произвольного четырехугольника

Выражение полинома с четырьмя коэффициентами типа, данного в уравнении (V.4), может без особых трудностей применяться к четырехугольникам вообще, как это показано на рис. 32. В этом случае, однако, условие совместности для непрерывности

смещения между смежными элементами удовлетворяются не будет, так как изменение функции вдоль любой прямой, наклонной к оси x или y , не будет линейным.

Для преодоления этой трудности целесообразно записать полином заданной формы с помощью специальных координат, которые принимают постоянные величины вдоль сторон любого произвольного четырехугольника.

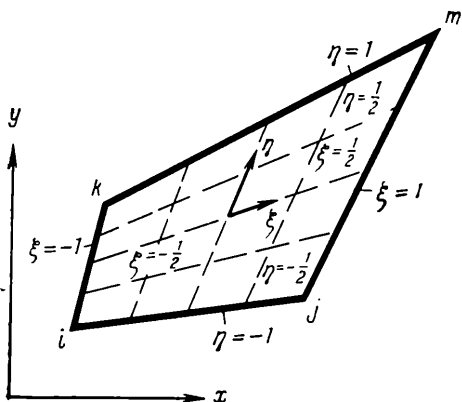


Рис. 32. Четырехугольный элемент общего вида и новая система координат

Такие координаты упоминаются у Irgons [3] и приводятся на рис. 32. Вновь вводимые координаты ξ и η выбраны так, что линии постоянных ξ и η есть прямые и принимают величины ± 1 у сторон четырехугольника. Обе величины увеличиваются в линейном масштабе.

Если поэтому представить выражение (V.4) в функции этих новых координат, то смещение u будет линейно изменяться вдоль сторон элемента, что обеспечивает непрерывность. Исходя из подобия

с выражением уравнения (V.6), получаем

$$u = \frac{1}{4} \{ (1 - \xi)(1 - \eta)u_i + (1 + \xi)(1 - \eta)u_j + (1 + \xi)(1 + \eta)u_m + (1 - \xi)(1 + \eta)u_k \} \quad (V.8)$$

Это уравнение можно использовать лишь в том случае, если деформации и различные результаты интегрирования относятся к системе координат x и y . Соотношения между двумя системами координат можно вывести очень легко. Вдоль любой линии $\xi = \text{const}$ x и y изменяются линейно с η , и так как аналогичное положение справедливо для $\eta = \text{const}$, то уравнение (V.8) представляет необходимую интерполяционную формулу. Таким образом, можно записать

$$x = \frac{1}{4} \{ (1 - \xi)(1 - \eta)x_i + (1 + \xi)(1 - \eta)x_j + (1 + \xi)(1 + \eta)x_m + (1 - \xi)(1 + \eta)x_k \} \quad (V.9)$$

и таким же образом

$$y = \frac{1}{4} \{ (1 - \xi)(1 - \eta)y_i + (1 + \xi)(1 - \eta)y_j + (1 + \xi)(1 + \eta)y_m + (1 - \xi)(1 + \eta)y_k \}. \quad (V.10)$$

Так как трудно, если вообще возможно, записать уравнение (V.8) непосредственно с помощью координат x и y , целесообразно продолжать дальнейшие вычисления с помощью дополнительных координат. Дифференцирование по x и y может быть заменено дифференцированием по ξ и η .

Мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y}; \quad (V.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y},$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (V.12)$$

где $[J]$ есть якобиан, который с помощью уравнений (V.9) и (V.10) принимает вид

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta), & (1-\eta), & (1+\eta), & -(1+\eta) \\ -(1-\xi), & -(1+\xi), & (1+\xi), & (1-\xi) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x_i, & y_i \\ x_j, & y_j \\ x_m, & y_m \\ x_k, & y_k \end{bmatrix}. \quad (V.13)$$

Таким образом, легко вывести матрицы деформации с помощью координат η и ξ .

Интегрирование по отношению $dx dy$ может быть таким же образом заменено интегрированием по отношению $d\xi d\eta$ при соответствующем упрощении пределов интегрирования, которые в этом случае для обеих переменных устанавливаются от -1 до $+1$. Легко показать, что замена

$$dx dy = \det | J | d\xi d\eta \quad (V.14)$$

должна быть произведена при подобном интегрировании. Таким образом, мы имеем все необходимое для получения матриц жесткости и напряжения, поэтому мы не будем останавливаться на этом подробнее. Очевидно, однако, что при интегрировании различных выражений мы встречаемся с трудностями, которые почти непреодолимы, если мы хотим получить выражение в замкнутой

форме. Эти трудности возникают из-за матрицы $|J|^{-1}$, где в знаменателе различных выражений встречаются полиномы.

На данной фазе поэтому целесообразно применить численное интегрирование. При этом η и ξ разделяются на соответствующие промежутки, и матрица $[J]$ вычисляется в нескольких точках. Численное определение соответствующих интервалов производится с помощью метода Гаусса или другими подобными способами [3] (см. также Приложение V). При этом, однако, программы для вычислительных машин усложняются, и поэтому неизвестно, нельзя ли скорее добиться улучшенной точности вычисления с помощью более точной разбивки при обычном использовании треугольных элементов.

Улучшение точности вычисления при использовании этих четырехугольников вполне очевидно, но значительно более важно, что с помощью изложенных выше принципов можно производить дальнейшее формулирование.

27. Треугольный элемент с шестью узлами

Если элемент имеет 6 узлов, то возможно полное квадратичное выражение для любой функции, содержащей 6 постоянных, а постоянные будут определяться единственно в зависимости от функции узловых величин. Так, например, смещение u может быть записано

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (V.15)$$

Постоянные α_1, α_6 могут быть найдены из шести уравнений типа

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 y_1 + \alpha_6 y_1^2. \quad (V.16)$$

При использовании полного квадратичного полинома все деформации и напряжения могут иметь любое предписанное линейное изменение по элементу, в то время как критерий постоянного напряжения все еще будет применим.

Естественно, это увеличивает число степеней свободы по сравнению с любым другим рассмотренным здесь элементом и ведет к улучшенному представлению.

Изменение u по любой стороне элемента будет иметь форму параболы, и при этом необходимо учитывать непрерывность смещения в отношении к соседним элементам.

Если форма элемента будет треугольная, как это показано на рис. 33, то для любой стороны 1—2—3 мы можем записать

$$u(s) = a + bs + cs^2,$$

причем изменение u имеет вид параболы. Парабола единственно определится с помощью величин u в узлах 1, 2 и 3, а непрерывность смещений в этих узлах относительно смещений в соседних

элементах автоматически обеспечивает непрерывность по всей поверхности 1—2—3. Это положение было сформулировано Fraeijs de Veubeke [4] и позднее Аргирисом [5]. Для данного числа узлов эта формула обеспечивает лучшее представление истинного напряжения и смещения, чем то, которое можно получить для такого же числа узлов с помощью более мелкого разбиения

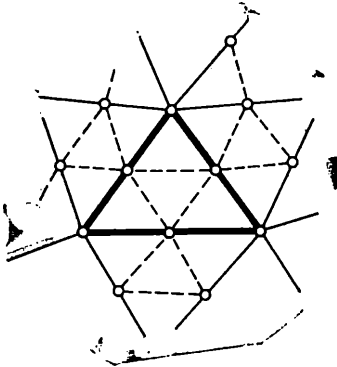


Рис. 33. Треугольный элемент с шестью узлами

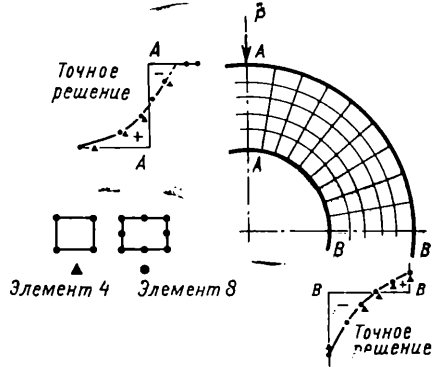


Рис. 34. Цилиндр под действием нагрузки p , приложенных по одному из диаметров. Результаты расчета с двумя типами специальных элементов

на простые треугольные элементы (последнее показано пунктирными линиями на рис. 34, и из рисунка видно, что число элементов в этом случае в 4 раза больше).

В практических задачах целесообразно ввести дополнительные узлы в середине сторон и определить их координаты с помощью машины.

Уравнения для смещений u и v в узлах могут быть записаны так:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}, \quad (V.17)$$

или

$$\{\delta\}^e = [C] \{\alpha\}. \quad (V.18)$$

Поскольку

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} 1, x, y, x^2, xy, y^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x, y, x^2, xy, y^2 \end{Bmatrix} \{\alpha\} = [P] \{\alpha\}, \quad (V.19)$$

можно записать

$$\{f\} = [P] [C]^{-1} \{\delta\}^e = [N] \{\delta\}^e. \quad (V.20)$$

Подобным образом можно записать деформации

$$\{\epsilon\} = [\Omega] \{\alpha\} = [\Omega] [C]^{-1} \{\delta\}^e = [B] \{\delta\}^e, \quad (V.21)$$

откуда матрица жесткости может быть получена с помощью формул главы II.

Явное интегрирование выражений по частям возможно, но численное определение $[C]$ и ее обращения более удобно.

Следует заметить, что для получения обращения 12×12 только одна матрица 6×6 должна быть обращена, так как две системы уравнений для u и v идентичны.

Вполне очевидно, что можно еще более улучшить форму и свойства элемента в соответствии с методом, изложенным в этой главе.

28. Иллюстративный пример

Использование более совершенных элементов иллюстрируется на примере цилиндра, который подвергается нагружению вдоль диаметра. В этом случае используются четырехугольные элементы с четырьмя узлами того типа, который был описан в параграфе 26, а также еще более совершенные элементы с восемью узлами. Приводимые графики напряжения свидетельствуют о хорошем приближении при решении с помощью более простых элементов и дают точные результаты при использовании элементов с восемью узлами. Этот элемент [6] строится с использованием полиномов, которые имеют параболические изменения вдоль сторон и включают два кубических члена в дополнение ко всем квадратичным.

Например, выражение

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^2 \eta + \alpha_8 \zeta \eta^2 \quad (V.22)$$

есть основная формула формы смещения. В других случаях можно получить еще более улучшенное решение с увеличением порядка элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. W. Clough, The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd. A.S.C.E. Conf on Electronic Computation, Pittsburg Pa., Sept. 1960.
2. R. W. Clough, The finite element in structural mechanics, chapter 7 of 'Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.

3. B. M. Irons, Numerical integration applied to finite element methods, Conf. on Use of digital computers in Structural Engineering. Univ. of Newcastle, July 1966.
4. B. Fraeijs de Veubeke, Displacement and equilibrium models in the finite element method, chapter 9 of Stress Analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
5. J. H. Argyris, Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method, J. Roy. aero. Soc. Tech. note, 69, pp. 711—13, Oct. 1965.
6. J. Ergatoudis, Quadrilateral elements in plane analysis, M. Sc. thesis, University of Wales, Swansea, 1966.

29. Вступление

Для читателя уже становится ясным, что теперь общий метод конечных элементов можно применить к расчету напряжения для объемных задач. Такие задачи охватывают почти все практические ситуации, хотя в некоторых случаях с помощью различных двумерных аппроксимаций можно получить более точную и более экономичную «модель».

Для получения приемлемой физической аппроксимации при решении объемных задач потребуется, естественно, большее количество элементов, что перегружает память даже самых больших современных машин. На данном этапе мы не рассматриваем подробно эти трудности.

Простым двумерным непрерывным элементом является треугольник. При трехмерных задачах его эквивалентом будет тетраэдр, элемент с четырьмя узловыми углами, поэтому в первой части данной главы мы даем основные формулировки такого элемента. Здесь сразу же возникает трудность, с которой мы не сталкивались ранее. Это вопрос порядка нумерации узловых чисел, т. е. соответствующего представления тела, разделенного на 8 узловых точек, что в простейшем виде представляет четырехугольную призму. При рассмотрении подобного элемента нужно использовать некоторые методы, разработанные в главе V в отношении четырехугольников. При использовании подобных элементов обнаруживается одно преимущество — физическое представление объема, составленного из восьмиугольных блоков, значительно упрощается. Вывод формулы для таких элементов производится во второй части этой главы. Первые попытки сформулировать матрицу тетраэдрального элемента встречаем у Gallagher et al. [1] и Melosh [2]. Дальнейшее развитие этой задачи дано у Аргириса [3, 4]. Более сложные элементы, рассматриваемые в конце этой главы, были предложены Irgons [5] и Argyris [6].

30. Характеристики тетраэдрального элемента

30.1. Функции смещения. На рис. 35 изображен тетраэдральный элемент $ijtr$ с координатами x , y и z . Смещение в точке определяется с помощью трех компонентов смещения u , v и w в направлении трех координат x , y и z .

Таким образом,

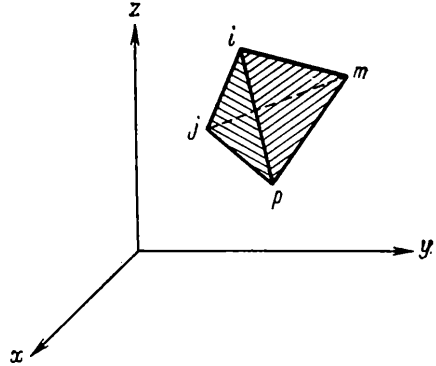
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (\text{VI.1})$$

Как в плоском треугольнике линейные количественные изменения определялись с помощью трех узловых величин, так и в данном случае линейные изменения будут определяться с помощью четырех узловых величин.

По аналогии с уравнением (III.3) мы, например, можем записать

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (\text{VI.2})$$

Рис. 35. Пространственный элемент в форме тетраэдра (рекомендуется использовать последовательный порядок нумерации, т. е. начиная с p узлы следует пронумеровать против часовой стрелки, например $pijm$ или $mirj$ и т. д.)



Приравнивая величины смещения в узлах, получаем 4 уравнения типа

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (\text{VI.3})$$

откуда можно найти $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Это решение может быть записано в форме, аналогичной уравнению (III.5), с помощью определителя, т. е.

$$u = \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \}, \quad (\text{VI.4})$$

где

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1, & x_i, & y_i, & z_i \\ 1, & x_j, & y_j, & z_j \\ 1, & x_m, & y_m, & z_m \\ 1, & x_p, & y_p, & z_p \end{vmatrix}, \quad (\text{VI.5a})$$

и величина V представляет объем тетраэдра. Раскрывая другие соответствующие определители в форме их алгебраических дополнений, мы получаем

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j, & y_j, & z_j \\ x_m, & y_m, & z_m \\ x_p, & y_p, & z_p \end{vmatrix},$$

$$b_i = - \det \begin{vmatrix} 1, & y_j, & z_j \\ 1, & y_m, & z_m \\ 1, & y_p, & z_p \end{vmatrix}, \quad (\text{VI.56})$$

$$c_i = \det \begin{vmatrix} x_j, & 1, & z_j \\ x_m, & 1, & z_m \\ x_p, & 1, & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = - \det \begin{vmatrix} x_j, & y_j, & 1 \\ x_m, & y_m, & 1 \\ x_p, & y_p, & 1 \end{vmatrix},$$

где остальные постоянные определяются с помощью циклической перестановки индексов в последовательности p, i, j, m .

Последовательность наименования узлов p, i, j, m должна следовать правилу «правой руки», которое вытекает из рис. 35. В соответствии с ним первые три узла получают индексы в направлении против часовой стрелки, если вести отсчет от последнего узла. Смещение элемента находим с помощью двенадцати компонентов смещения

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix}, \quad (\text{VI.6})$$

где

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

Смещение произвольной точки может быть записано так:

$$\{f\} = [IN'_i, IN'_j, IN'_m, IN'_p] \{\delta\}^e, \quad (\text{VI.7})$$

где скаляры определяются как

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V \quad (\text{VI.8})$$

а I есть единичная матрица 3×3 . Используемые функции смещения в этом случае, очевидно, удовлетворяют требованиям непрерывности на внешней поверхности между различными элементами. Это является прямым следствием линейного характера изменения смещения.

30.2. Матрица деформации. В трехмерном случае для полного решения достаточно рассмотреть 6 компонентов деформации.

Матрица деформации может быть определена как

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad (\text{VI.9})$$

следуя стандартным обозначениям, даваемым Тимошенко. С помощью уравнений (IV.4)—(VI.7) легко убедиться, что

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [B_i, B_j, B_m, B_p] \{\delta\}^e, \quad (\text{VI.10})$$

где

$$[B_i] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.11})$$

Другие матрицы получаем таким же образом, просто меняя местами нужные индексы. Начальные деформации, подобные деформациям температурного расширения, могут быть записаны в обычной форме как вектор с шестью компонентами, который, например, при изотропном температурном расширении есть просто

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{VI.12})$$

где α — коэффициент расширения, а θ^e — среднее повышение температуры элемента.

30.3. Матрица упругости. В полностью анизотропном состоянии матрица $[D]$, выражающая отношение шести компонентов напряжения к компонентам деформации, может содержать 21 независимую постоянную (см. раздел 14.4).

Таким образом, в общем случае

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (\text{VI.13})$$

Хотя при вычислениях, связанных с подобного рода материалами, трудностей не возникает, так как умножение никогда не бывает явным, мы считаем целесообразным повторно рассмотреть матрицу $[D]$ для изотропного материала. Так, с помощью обычных постоянных упругости E (модуль) и ν (коэффициент Пуассона) можно матрицу $[D]$ записать как

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1, & \nu/(1-\nu), & \nu/(1-\nu), & 0, & 0, & 0 \\ & 1, & \nu/(1-\nu), & 0, & 0, & 0 \\ & & 1, & 0, & 0, & 0 \\ \times \text{Симметрично} & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, & 0, & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}, & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.14})$$

30.4. Матрицы жесткости, напряжения и нагрузки. Матрицы жесткости, определяемые общим соотношением уравнения (II.10), могут быть явно проинтегрированы, так как компоненты напряжения и деформации в элементе постоянны.

Обычная подматрица rs матрицы жесткости есть матрица 3×3 , определяемая как

$$[k_{rs}] = [B_r]^T [D] [B_s] V, \quad (\text{VI.15})$$

где V есть объем элементарного тетраэдра.

Узловые силы, возникающие в результате начальной деформации, определяем по аналогии с уравнением (III.31):

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} V, \quad (\text{VI.16})$$

или

$$\{F_i\}_{e_0} = -[B_i]^T [D] \{\epsilon_0\} V$$

Результаты настолько аналогичны описанным в главе III, что дальнейшего явного формулирования не требуется. Читатель не встретит никаких затруднений на всех этапах составления программы для машины. Распределенные массовые силы снова можно представить в функции их компонентов X, Y, Z или в функции потенциала силы. Не удивительно, что мы еще раз убедимся, что, если массовые силы постоянны, то узловые компоненты общей равнодействующей силы окажутся распределенными на 4 равные части (см. III.34).

31. Составные элементы с восемью узлами

На рис. 36 показан восьмиугольный элемент, наиболее удобный для расчета напряжения. Легко убедиться, что элемент подобной формы (который есть шестигранник) может быть построен

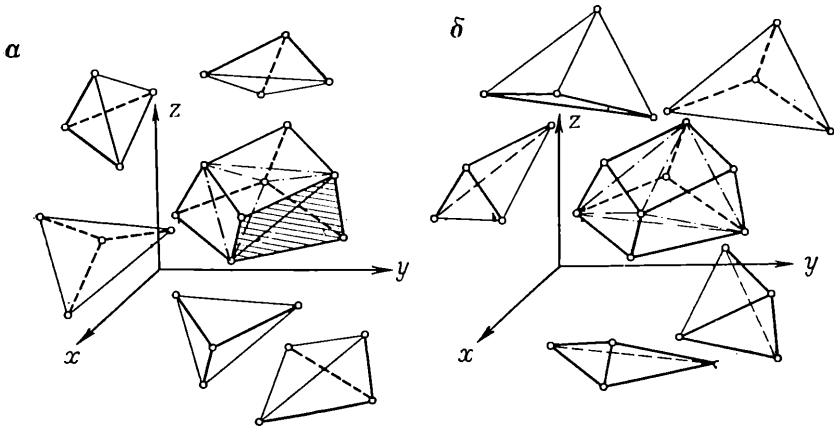


Рис. 36. Сложный элемент с восемью узлами и разбивка его на пять тетраэдров (а) и другой способ разбивки на тетраэдры (б)

только двумя способами из пяти элементов — тетраэдров. Оба эти способа деления на тетраэдральные элементы показаны на рисунке. Таким же способом, какой был изложен в параграфе 24, эти соединения могут быть использованы для улучшения точности представления напряжения, а если взять оба типа соединения и осреднить результаты, то и для получения улучшенной матрицы жесткости.

Дальнейшее усовершенствование — это разбиение восьмиугольного «кирпичного» элемента на шесть тетраэдров. При использовании его без усреднения диагонали противоположных сторон

всегда могут быть представлены параллельно, что обеспечит ряд преимуществ. Если кирпичный элемент напоминает по форме параллелепипед, то объемы всех тетраэдров приблизительно равны. Среднее напряжение будет, таким образом, хорошо соответствовать истинной картине.

32. Улучшенные функции смещения — прямоугольная призма

Если взять элементы с восемью узлами, то мы сможем использовать более сложные функции формы и, следовательно, получить лучшую степень представления реальных деформаций. Например, для представления компоненты смещения u возьмем полином, сохранив восемь членов в выражении

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 +$$

Мы не можем сказать определенно, какие именно члены следует сохранить. Однако сейчас можно провести аналогию с функциями формы, которые были выведены для четырехугольника в параграфе 25.

Мы видим, что для обеспечения непрерывности со смещениями смежных элементов функция смещения должна линейно изменяться вдоль ее сторон. Для четырехугольных элементов это ограничение привело к функциям формы, описываемым с помощью уравнения (V.5) или (V.6). Мы можем немедленно записать функции формы для элемента, показанного на рис. 37, как

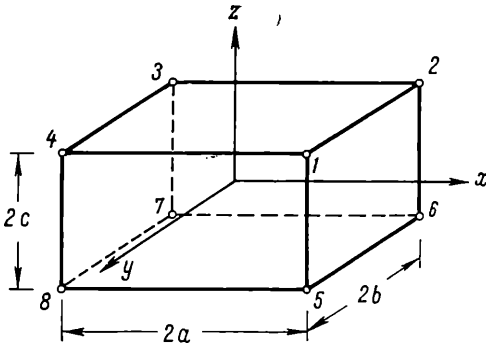


Рис. 37. Призматический прямоугольный элемент

$$u = \frac{1}{8} [(1 + x')(1 + y')(1 + z')u_1 + (1 + x')(1 - y')(1 + z')u_2 + (1 - x')(1 - y')(1 + z')u_3 + (1 - x')(1 + y')(1 + z')u_4 + (1 + x')(1 + y')(1 - z')u_5 + (1 + x')(1 - y')(1 - z')u_6 + (1 - x')(1 - y')(1 - z')u_7 + (1 - x')(1 + y')(1 - z')u_8], \quad (VI.17)$$

используя безразмерные координаты

$$x' = x/a, \quad y' = y/b, \quad z' = z/c \quad (VI.18)$$

с точкой начала координат в центре тяжести.

С первого взгляда можно убедиться, что u изменяется линейно в любом сечении, параллельном одной из осей, поэтому непрерывность смещения автоматически сохраняется.

Снова вектор полного смещения может быть записан как *

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [IN'_1, IN'_2, \quad IN'_8] \{\delta\}^e, \quad (\text{VI.19})$$

где I — единичная матрица 3×3 , а

$$N'_1 = \frac{1}{8} (1 - x') (1 - y') (1 - z')$$

Определив теперь функцию смещения, мы можем найти вектор деформации и затем матрицу жесткости традиционным способом без всяких трудностей.

Деформации в этом случае будут линейно изменяться в зависимости от координат, но явное интегрирование может быть произведено без затруднения, так как пределы интегрирования очень просты. Польза элемента будет ограниченной, так как только простые границы поддаются приближенному определению, а изменения размеров элемента произвести трудно. Однако, как и в выводах в параграфе 25, мы определили метод подхода к восьмиугольным элементам произвольной формы.

Интересно отметить, что используемая здесь функция смещения может выражать постоянные условия деформации, и поэтому она удовлетворяет основному критерию сходимости, определенному в главе II.

33. Улучшение функции смещения — элемент с восемью произвольными узлами

На рис. 38 показан элемент с восемью произвольными узлами. Он имеет искривленную поверхность, которую на данном этапе мы не определяем. Как это делалось с четырехугольником произвольной формы в параграфе 26, выбираем ряд специальных линейных координат. Эти координаты ξ , η и ζ , и они выбираются так, что, например, ξ изменяется от -1 на поверхности 5, 6, 7, 8 до $+1$ на 1, 2, 3, 4, а остальные координаты изменяются в тех же пределах на соответствующей паре поверхностей. На линиях, где две из координат постоянны, третья увеличивается линейно. Такими линиями являются ребра элемента, поэтому соответствующие координаты изменяются линейно вдоль этих ребер. Поверхность любой стороны определяется однозначно с помощью четырех узлов, которые ее образуют.

На рис. 38 приведены такие поверхности; изучение их показы-

* Это выражение аналогично так называемой интерполяционной формуле Лагранжа и впервые оно было представлено Melosh [2].

вает, что имеется лишь один ряд прямых, которые разделяют два других линейно равных сегмента*.

Снова можно использовать формулу уравнения (VI.19) для определения смещения внутри элемента, но на этот раз с помощью новых координат. Например,

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [IN'_1, IN'_2, \dots, IN'_8] \{\delta\}^e, \quad (\text{VI.20})$$

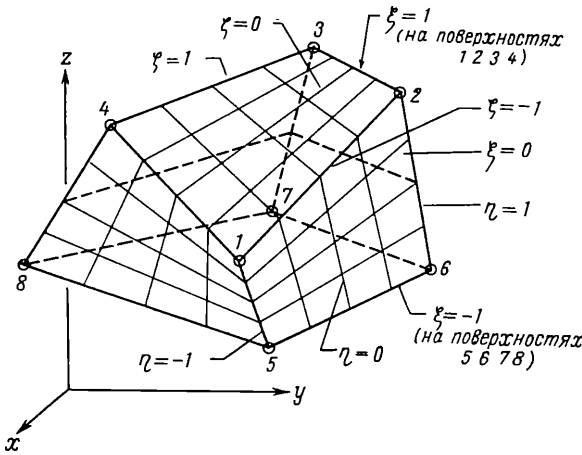


Рис. 38. Элемент с восемью узлами и его представление в координатной системе $\xi=1$ (на поверхностях 1234); $\xi=-1$ (на поверхностях 5678)

где I есть единичная матрица размером 3×3 ,

$$N'_1 = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \quad (\text{VI.21})$$

Линейное соотношение между x , y , z и новыми координатами может быть получено с помощью тех же функций, обеспечивающих интерполяцию. Например, исходя из уравнений (V.9) и (V.10), мы можем записать

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [IN'_1, IN'_2, \dots, IN'_8] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.22})$$

Математические вычисления, подобные тем, которые представлены в параграфе 26, позволяют выразить истинные деформации

* Форма этих поверхностей есть гиперболические параболоиды.

(или дифференцирование по x , y и z) с помощью производных по новым координатам.

Переменные интегрирования и пределы, с которыми мы сталкиваемся при определении матриц жесткости и напряжения, могут также быть преобразованы. В этом случае опять мы находим явное интегрирование нецелесообразным и поэтому прибегаем к численному интегрированию. Необходимые при этом алгебраические вычисления, хотя и не представляются сложными, являются все же исключительно громоздкими, и поэтому они здесь не приводятся. Таким образом, в принципе мы достигли цели получения матрицы жесткости для элемента новой формы.

34. Тетраэдральный элемент с десятью узлами

В параграфе 27 был представлен двухразмерный треугольный элемент, в котором число узлов позволяло использовать квадратичные выражения. При трехмерных задачах для получения квадратичного выражения для полноты требуется 10 членов. Смещение, следовательно,

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} z^2. \quad (\text{VI.23})$$

Если нам заданы эти 10 узловых величин, то мы можем определить все 10 коэффициентов. Для обеспечения непрерывности между смежными элементами необходимо расположить эти десять узлов на углах и посередине сторон тетраэдра, как это показано на рис. 39. Параболическое изменение вдоль каждой стороны обеспечивает непрерывность, так как только три узловые величины вдоль этой грани могут определить эту параболу. Если подобную аргументацию теперь распространить на всю поверхность элемента, то мы можем легко увидеть, что на этой поверхности окажется шесть узловых величин, которые единственным образом определяют полином второго порядка от двух переменных и обеспечивают полную совместность смещений. Определение смещений с помощью полного квадратичного выражения имеет преимущество над предыдущими формулами, так как в данном случае может быть определено любое линейное изменение напряжения или деформации (например, разложение, определяемое из уравнения (VI.18), сохраняет только члены произ-

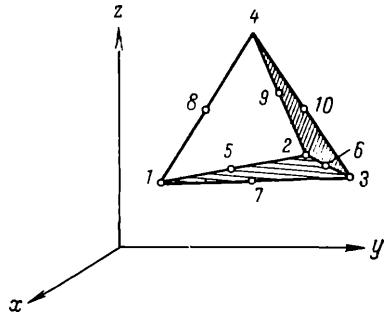


Рис. 39. Тетраэдральный элемент с узлами, расположенными посередине сторон

ведений xu , uz , zx , xuz и дает линейные, но несколько ограниченные изменения деформации). Элемент подобного типа был впервые предложен и использован Аргирисом [6]. Вычисление матриц жесткости и напряжения исходит из общей методики, приведенной в параграфе 27.

Снова понадобится явная оценка некоторых интегралов внутри тетраэдра. Некоторые из основных таких интегралов перечислены в приложении IV.

35. Общие замечания

Для экономичного решения трехмерных задач требуется использовать уточненные элементы. Использование восьмиугольного «кирпичика» как основной строительной единицы является ценным еще в том смысле, что позволяет наблюдать за разбиением пространства. Возможности применения еще более тщательно разработанных элементов столь велики, что сейчас мы не сможем их просто перечислить. Практический оптимальный вариант пока еще не определен. Перечисляя лишь некоторые возможности, которые сейчас находятся в стадии исследования, мы можем указать на следующие усовершенствованные восьмиугольные элементы:

a — улучшенный тетраэдр, представленный в параграфе 34;

b — более высокий порядок интерполяции полинома того типа, который был представлен в параграфе 33 с увеличенным числом узловых точек, помещенных по ребрам «блоков» [7];

c — использование непрерывности производных смещений в узловых точках [7].

Очевидно, что увеличение размера вычислительных средств и автоматизация процесса разбивки на элементы является важным фактором. Широкие возможности использования трехмерного анализа открывает дверь к решению ранее трудноисследуемых задач.

36. Некоторые примеры

Для проверки степени точности при трехмерном решении обычная осесимметричная задача Буссинеска решалась как полностью трехмерная. Четверть изотропного полупространства была разбита на элементы параллелепипедной формы, как это показано на рис. 40. При этом использовался тип элемента, полученный с помощью двойного осреднения при разбивке на пять тетраэдров. На рис. 41 дается сравнение точных и вычисленных величин компонентов вертикального напряжения и вертикальных смещений; точность вычисления хорошая. Необходимо отметить, что вычисленные вертикальные смещения были скорректированы так, чтобы основание расчетной области не увеличивалось бы до бесконечности. Метод решения указанного типа распространяется на большое число инженерных задач, но следует отметить, что необходимое

Рис. 40. Задача Буссинеска как иллюстрация решения пространственной задачи

Граничные условия:
 $u=v=w=0$ на ABC ,
 $u=0$ на $AEND$ } симметрич;
 $v=0$ на $AEFB$
 все остальные граничные поверхности являются свободными

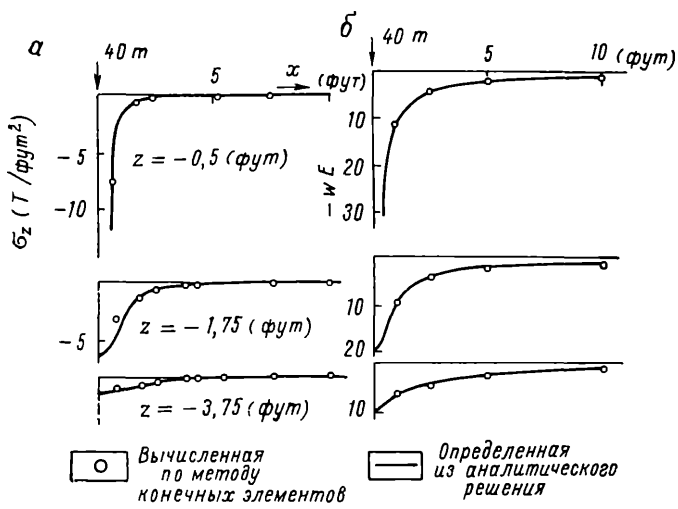
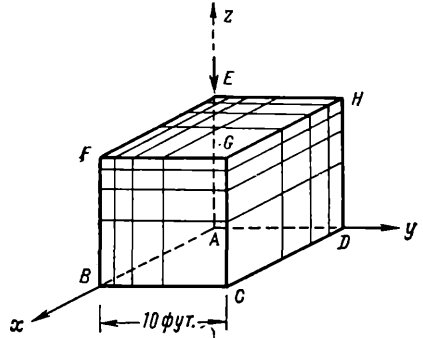


Рис. 41. Задача Буссинеска:
 а — графики изменения вертикальных напряжений (σ_z); б — графики изменения вертикальных смещений (w)

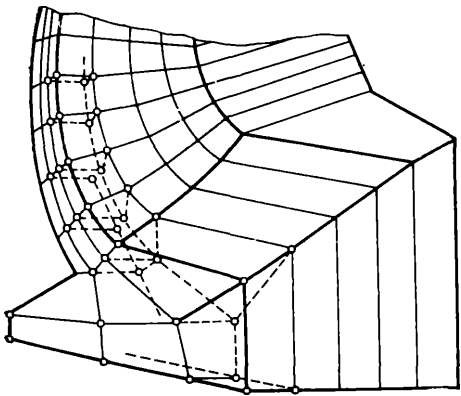


Рис. 42. Представление арочной плотины и ее основания в форме восьмиугольных элементов

машинное время является весьма существенным вследствие большого числа степеней свободы и что, как следствие, ширина полосы совместных уравнений становится значительной.

На рис. 42 показано практическое применение восьмиугольных элементов для разбивки трехмерной области. Использование параллельных секций очень полезно для визуального наблюдения. Очевидна необходимость автоматической подготовки данных, что подробнее рассматривается в главе XV.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. H. Gallagher, J. Padlog, P. P. Bijlaard, Stress analysis of heated complex shapes, *J. Aero-Space Science*, pp. 700—7, 1962.
2. R. J. Melosh, Structural analysis of solids, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, S. T. 4, pp. 205—23, Aug. 1963.
3. J. H. Argyris, Matrix analysis of three-dimensional elastic media-small and large displacements, *J. A.I.A.A.*, 3, pp. 45—51 (Jan.), 1965.
4. J. H. Argyris, Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous media-matrix analysis for small and large displacements, *Ingenieur Archiv.*, 34, pp. 33—55, 1965.
5. B. M. Irons, Stress Analysis by stiffnesses using numerical integration, *Rolls Royce Co. (Internal Report)*, June 1963.
6. J. H. Argyris, Continua and Discontinua, *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
7. B. M. Irons, Numerical integration applied to finite element methods, *Conf. on Use of digital computers in Structural Engineering*, Univ. of Newcastle, July, 1966.

37. Вступление

Во всех задачах, приведенных в предыдущих главах, основные соотношения «напряжение — деформация» были даны в точной форме, хотя окончательное решение получалось приближенным.

В классической теории плит [1] вводятся определенные приближения для упрощения задачи и сведения ее к двумерной.

Такие допущения касаются линейных изменений напряжения и деформации на линиях, перпендикулярных к поверхности плиты. Так называемые «точные» решения в теории плит будут справедливы только в том случае, если плиты будут тонкими, а отклонение (прогиб) незначительным. В приводимых здесь решениях отправной точкой снова явятся допущения классической теории, и численные аппроксимации будут, таким образом, проверены на решениях теории плит. Это будет также способствовать уточнению некоторых ограничений. Состояние деформации плиты может быть полностью описано с помощью одной величины поперечного смещения w средней плоскости плиты. Условие непрерывности между элементами в этом случае является необходимым условием не только для этой величины, но и для ее производных. Это необходимо для того, чтобы плита оставалась непрерывной и чтобы не происходило перекручивания* Поэтому в каждом узле необходимы три условия равновесия и непрерывности. Определение соответствующих функций формы будет теперь более сложным. В самом деле, если на поверхности раздела между различными элементами необходима полная непрерывность, трудности в вычислении становятся весьма значительными. Однако можно довольно легко получить функции формы, сохраняя непрерывность w , в то же время нарушают непрерывность наклона между элементами, только не в узле, где эта непрерывность установлена. Если такие функции удовлетворяют состоянию постоянной деформации, сходимость может быть получена (см. главу II).

Первая часть этой главы будет рассматривать подобные несогласующиеся функции формы. Во второй части вводятся новые функции, с помощью которых непрерывность может быть восстановлена. Решение при помощи таких согласующихся функций формы найдется в границах правильного, но во многих случаях

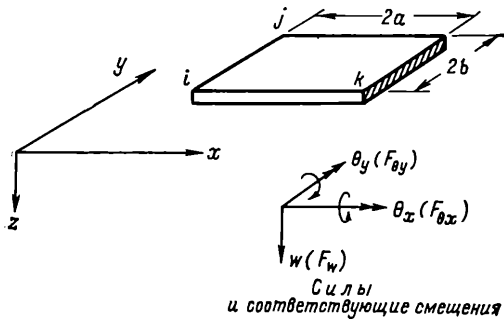
* При перекручивании вторая производная или кривизна становится бесконечной, поэтому в выражении энергии появятся некоторые бесконечные члены.

точность будет низкой. Поэтому в практических целях рекомендуются методы, описываемые в первой части этой главы. Простейшим типом плоского элемента будет прямоугольник, поэтому мы прежде всего вводим именно его. Треугольные и четырехугольные элементы представляют определенные трудности и будут введены позже. Подобные элементы необходимы для решения задач с плитами произвольной формы или с оболочками.

НЕСОГЛАСУЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ ФОРМЫ

38. Прямоугольный элемент

38.1. Функции формы. Рассмотрим прямоугольный элемент плиты $ijkl$, совпадающий с плоскостью $x-y$, как это показано на рис. 43. В каждом узле вводятся смещения $\{\delta_n\}$. Они имеют три компонента: первый — смещение в направлении $z-w_n$, второй —



вращение вокруг оси $x-(\theta_x)_n$, третий — вращение вокруг оси $y-(\theta_y)_n$. Положительные направления вращений определяются с помощью правила правой руки и обозначены на рисунке векторами, направленными вдоль соответствующих осей.

Рис. 43. Плита как прямоугольный элемент

Очевидно, что углы наклона w и вращение идентичны (за исключением знака), т. е.

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (\text{VII.1})$$

Вектор узлового смещения в узле i может быть поэтому определен следующим образом:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}. \quad (\text{VII.2})$$

Смещение элемента, как обычно, будет дано при перечислении всех узлов элемента, которых сейчас четыре,

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_l \\ \delta_k \end{Bmatrix}. \quad (\text{VII.3})$$

Функции формы, которые сейчас можно рассматривать просто как скаляр ω (т. е. по терминологии главы II $\{f(x, y)\} = \omega$), т. е. в функции двенадцати параметров, полиномиальное выражение весьма удобно для использования. Некоторые члены должны быть опущены из полного полинома четвертого порядка. Выражение

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (\text{VII.4})$$

имеет определенные преимущества. В частности, вдоль любой линии $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ смещение ω будет изменяться по кубическому закону. Границы элемента или граничные поверхности состоят из таких линий. Кубическая парабола может быть определена единственным образом с помощью четырех постоянных. Два значения наклона и смещений на концах границ будут единственным образом определять смещения вдоль всей границы. Так как такие конечные величины являются общими с соседними элементами, непрерывность ω обеспечивается вдоль всей граничной поверхности. Как мы увидим, градиент ω , нормальный к любой из границ, изменяется вдоль границы по параболе (см. например, $\partial\omega/\partial x$ вдоль линии, где $x = \text{const}$). Так как на таких линиях определяются только две величины наклона нормали, парабола не может быть определена единственно и происходит разрыв непрерывности наклона нормали. Функция, таким образом, стала «несогласующейся».

Постоянные от α_1 до α_{12} могут быть определены, если записать все 12 одновременных уравнений, согласующих величину ω и ее наклон в узлах, когда координаты принимают свои соответствующие величины.

Например,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \\ \left(-\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_i &= \theta_{xi} = -\alpha_3 + \\ \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_i &= \theta_{yi} = \alpha_2 + \end{aligned}$$

Приведя все 12 уравнений, можно записать в матричной форме

$$\{\delta\}^e = [C] \{\alpha\}, \quad (\text{VII.5})$$

где $[C]$ есть матрица 12×12 , зависящая от узловых координат, а $\{\alpha\}$ — вектор двенадцати неизвестных постоянных.

Обращая это уравнение, имеем

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\delta\}^e. \quad (\text{VII.6})$$

Это обращение выполняется с помощью машины или, если нам необходимо получить явное выражение для жесткости и т. д., производится алгебраически. Это было выполнено Зенкевичем и Чангом [2]. Теперь можно записать выражение смещения внутри элемента в стандартной форме уравнения (II.1)

$$\text{где } \{f\} = w = [N] \{\delta\}^e = [P] [C]^{-1} \{\delta\}^e, \quad (\text{VII.7})$$

$$[P] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^2). \quad (\text{VII.8})$$

В явной форме это выражение было выведено Melosh [3].

Если начало координат принимается в центре элемента, то уравнение (VII.7) запишется как

$$\{\omega\} = [N_i, N_j, N_l, N_k] \{\delta\}^e,$$

где

$$N_i = X_1 Y_1 \{2(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2 + 6b Y_1 Y_2 - 4a X_1 X_2\};$$

$$N_j = X_1 Y_2 \{2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2 + 6b Y_1 Y_2 + 4a X_1 X_2\};$$

$$N_l = X_2 Y_2 \{2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2, -6b Y_1 Y_2, + 4a X_1 X_2\}$$

$$N_k = X_2 Y_1 \{2(X_2 Y_1 - X_1 Y_2) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2, -6b Y_1 Y_2, -4a X_1 X_2\};$$

$$X_1 = (x - a)/a; \quad Y_1 = (y - b)/b;$$

$$X_2 = (x + a)/a; \quad Y_2 = (y + b)/b.$$

38.2. Матрицы деформации и напряжения. В любой точке плиты x, y напряжения и деформации изменяются вдоль ее толщины.

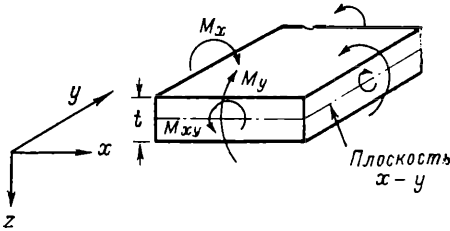


Рис. 44. Результирующие напряжения или «напряжения» при изгибе плиты

С помощью основных допущений это изменение представлено как линейное, поэтому, реальные деформации в любой плоскости на расстоянии z от средней плоскости могут быть описаны в функциях кривизны w . Аналогично реальные напряжения в точке, удаленной на расстояние z могут быть найдены в функции результирующих внутренних моментов напряжения. Испол-

зуя снова знакомые обозначения [1] и обращаясь к рис. 44, можно определить три таких внутренних момента в любой точке и таким образом зафиксировать напряжение по всей толщине. Это M_x, M_y, M_{xy} , которые выражают результирующую напряжения, действующего на единицу длины x или y .

Действующие напряжения определяются с помощью таких выражений, как

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{t^2} z \text{ и т. д.,}$$

которые являются прямым следствием линейного изменения напряжения. Три величины кривизны, определяющие деформации, есть соответственно

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

При определении обобщенных деформаций и напряжений важно, чтобы внутренняя работа выражалась суммой произведений соответствующих компонентов. Для этого вводится в величину изгибной кривизны множитель 2* и включаются в рассмотрение соответствующие знаки.

Обобщенная «деформация» может быть определена как

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, \quad (\text{VII.9})$$

а соответствующее обобщенное «напряжение» как

$$\{\sigma\} = \{M\} = \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\}. \quad (\text{VII.10})$$

Для прямоугольного элемента функции формы были уже определены, и уравнение (VII.9) может быть записано в стандартном виде уравнения (II.2)

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e.$$

Вид [B] получаем непосредственно из уравнения (VII.4). Так как

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{cccc} -2\alpha_4 & -6\alpha_7 x & -2\alpha_8 y & -6\alpha_{11} xy \\ -2\alpha_6 & -2\alpha_9 x & -6\alpha_{10} y & -6\alpha_{12} xy \\ 2\alpha_5 & +4\alpha_8 x & +4\alpha_9 y & +6\alpha_{11} x^2 + 6\alpha_{12} y^2 \end{array} \right\}, \quad (\text{VII.11})$$

мы можем записать

$$\{\varepsilon\} = [\Omega] \{\alpha\} = [\Omega] [C]^{-1} \{\delta\}^e,$$

а также

$$[B] = [\Omega] [C]^{-1},$$

* Коэффициент 2 необходим, так как работа выполняется крутящими моментами на обеих поверхностях. Эти крутящие моменты численно равны, поэтому они не записываются по отдельности.

где

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & -2, & 0, & 0, & -6x, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -2, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, \\ -2y, & 0, & 0, & -6xy, & 0 & & \\ \times & 0, & -2x, & -6y, & 0, & -6xy & \\ & 4x, & 4y, & 0, & 6x^2, & 6y^2 & \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.12})$$

Интересно теперь заметить, что выбранная функция смещения действительно допускает состояние постоянной деформации* и поэтому удовлетворяет условию сходимости, определяемому в главе II.

38.3. *Матрица упругости.* Линейное соотношение между матрицами напряжения и деформации типа (II.3)

$$\{\sigma\} \equiv \{M\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\})$$

снова выводится с помощью стандартных методов теории плит. Например, для изотропной плиты (см. Тимошенко и Войновский-Кригер [1])

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.13})$$

где E — есть модуль упругости, t — толщина, а ν — отношение Пуассона.

Для определения поведения ортотропной плиты, у которой основные направления ортотропии совпадают с осями x и y , необходимы четыре постоянные, т. е.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.14})$$

Эти постоянные могут быть соотнесены с соответствующими постоянными упругости материала, как показано у Тимошенко [1], но более удобно оставить их в вышеприведенной форме, так как теория плит часто используется для расчета решеток. В таких случаях постоянные должны быть соотнесены со свойствами решетки. Очевидно, для более полного случая анизотропии необхо-

* Если постоянные от α_7 до α_{12} равны нулю, то деформация постоянна. С помощью уравнения (VII.5) может быть найдена соответствующая величина на $\{\delta\}^e$. Так как имеется однозначное соответствие между $\{\delta\}^e$ и $\{\alpha\}$, подобное состояние будет поэтому однозначным. Все это доказывает, что $[C]^{-1}$ существует на самом деле. Алгебраическая инверсия показывает, что матрица $[C]$ никогда не бывает сингулярной.

Матрица жесткости прямоугольного элемента
(рис. 43. Ортоотропный материал)

Матрица жесткости $[k] = \frac{1}{60 ab} [L] \{D_x [K_1] + D_y [K_2] + D_1 [K_3] + D_{xy} [K_4]\} [L]$

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix}$$

	60											
	0	0										
	30	0	20									
	30	0	15	60								
	0	0	0	0	0							
	15	0	10	30	0	20						
$K_1 = p^{-2}$	-60	0	-30	-30	0	-15	60					
	0	0	0	0	0	0	0	0				
	30	0	10	15	0	5	-30	0	20			
	-30	0	-15	-60	0	-30	30	0	-15	60		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	15	0	5	30	0	10	-15	0	10	-30	0	20

$p^{-2} = \frac{b^2}{a^2}$

Симметрично

$K_2 = p^2$

60										
-30	20									
0	0	0								
-60	30	0	60							
-30	10	0	30	20						
0	0	0	0	0	0					
30	-15	0	-30	-15	0	60				
-15	10	0	15	5	0	-30	20			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
-30	15	0	30	15	0	-60	30	0	60	
-15	5	0	15	10	0	-30	10	0	30	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Симметрично

$$p^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

 $K_3 =$

30											
-15	0										
15	-15	0									
-30	0	-15	30								
0	0	0	15	0							
-15	0	0	15	15	0						
-30	15	0	30	0	0	30					
15	0	0	0	0	0	-15	0				
0	0	0	0	0	0	-15	15	0			
30	0	0	-30	-15	0	-30	0	15	30		
0	0	0	-15	0	0	0	0	0	15	0	
0	0	0	0	0	0	15	0	0	-15	-15	0

Симметрично

$K_4 =$

84										
-6		8								
6			0			8				
-84		6		-6		84				
-6		-2		0		6		8		
-6		0		-8		6		0		8
-84		6		-6		84		6		6
6		-8		0		-6		2		0
6		0		-2		-6		0		2
84		-6		6		-84		-6		-6
6		2		0		-6		-8		0
-6		0		2		6		0		-2

Симметрично

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad \text{где} \quad l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$$

димо 6 постоянных для определения $[D]$, так как матрица всегда должна быть симметричной.

38.4. *Матрицы жесткости и нагрузки.* Далее мы следуем стандартной процедуре и считаем почти излишним вдаваться в подробности.

С помощью уравнения (II.10) матрица жесткости, относящая узловые силы (выраженные с помощью горизонтальной силы и двух моментов в каждом узле) к соответствующим узловым смещениям, принимает вид

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \tag{VII.15}$$

или, подставляя уравнение (VII.11) и принимая t как постоянную внутри элемента,

$$[k] = \{[C]^{-1}\}^T \left(\iint [\Omega]^T [D] [\Omega] dx dy \right) [C]^{-1}. \tag{VII.16}$$

Матрица напряжения

Прямоугольный элемент на рис. 43.

$$\begin{pmatrix} M_i \\ M_j \\ M_k \\ M_l \end{pmatrix} = \frac{1}{4ab} \begin{pmatrix} +6\rho^{-1}D_{xy} & -8aD_1 & 8bD_x & -6\rho D_1 & 4aD_1 & 0 \\ +6\rho D_y & -8aD_y & 8bD_1 & -6\rho D_y & -4aD_y & 0 \\ -2D_{xy} & 4bD_{xy} & -4aD_{xy} & 2D_{xy} & 0 & 4aD_{xy} \\ -6\rho D_1 & 4aD_1 & 0 & +6\rho^{-1}D_x & 8aD_1 & 8bD_x \\ -6\rho D_y & 4aD_y & 0 & +6\rho^{-1}D_1 & 8aD_y & 8bD_1 \\ -2D_{xy} & 0 & -4aD_{xy} & 2D_{xy} & 4bD_{xy} & 4aD_{xy} \\ -6\rho^{-1}D_x & 0 & -4bD_x & 0 & 0 & 0 \\ -6\rho^{-1}D_1 & 0 & -4bD_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2D_{xy} & 4bD_{xy} & 0 & 2D_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6\rho^{-1}D_x & 0 & -4bD_x \\ 0 & 0 & 0 & -6\rho^{-1}D_1 & 0 & -4bD_1 \\ -2D_{xy} & 0 & 0 & 2D_{xy} & 4bD_{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(p = \frac{a}{b} \right)$$

Ортогогранный материал

$-6\rho^{-1}D_x$	0	$4bD_x$	0	0	0
$-6\rho^{-1}D_1$	0	$4bD_1$	0	0	0
$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	0	$-2D_{xy}$	0	0
0	0	0	$-6\rho^{-1}D_x$	0	$4bD_x$
0	0	0	$-6\rho^{-1}D_1$	0	$4bD_1$
$2D_{xy}$	0	0	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	0
$+ \frac{6\rho^{-1}D_x}{6\rho D_1}$	$-8aD_1$	$-8bD_x$	$-6\rho D_1$	$-4aD_1$	0
$+ \frac{6\rho^{-1}D_y}{6\rho D_1}$	$-8aD_y$	$-8bD_1$	$-6\rho D_y$	$-4aD_y$	0
$2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$-4aD_{xy}$	$-2D_y$	0	$4aD_{xy}$
$-6\rho D_1$	$4aD_1$	0	$+ \frac{6\rho^{-1}D_x}{6\rho D_1}$	$8aD_1$	$-8bD_x$
$-6\rho D_y$	$4aD_y$	0	$+ \frac{6\rho D_y}{6\rho^{-1}D_1}$	$8aD_y$	$-8bD_1$
$2D_{xy}$	0	$-4aD_{xy}$	$-2D_{xy}$	$-4bD_{xy}$	$4aD_{xy}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_l \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{array} \right\}$$

Члены, не содержащие x и y , выносятся из-под знака интеграла. Члены, находящиеся под знаком интегрирования, легко могут быть проинтегрированы явно. Вычисление матрицы жесткости $[k]$ явно было произведено для ортотропного материала и результат показан в табл. 1. Соответствующая матрица напряжения для внутренних моментов всех узлов дана в табл. 2.

Внешние силы, возникшие в узлах под влиянием распределенной нагрузки, определяем «на глаз», относя определенную часть площади к каждому узлу. Однако более логично и точно использовать стандартное выражение уравнения (II.9) для подобного распределения площади.

Если распределенная нагрузка q воздействует на единицу площади элемента в направлении ω , то с помощью уравнения (II.9) воздействие каждой из этих сил в каждом узле будет

$$\{F\}_p^e = - \iint [N]^T q dx dy \quad (\text{VII.17})$$

или из уравнения (VII.7)

$$\{F\}_p^e = \{-[C]^{-1}\}^T \iint [P]^T q dx dy. \quad (\text{VII.18})$$

Интеграл снова легко вычисляется. Здесь можно отметить, что в целом все 3 компонента внешней силы в каждом узле будут иметь какие-то значения, в частности, отличные от нуля.

При простом распределении внешних нагрузок мы не получили бы такого результата. В табл. 3 показан вектор узловой нагрузки при однородном нагружении q .

Т а б л и ц а 3

Матрица нагрузки для прямоугольного элемента (рис. 43) при однородной нагрузке

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{Bmatrix} = 4qab \begin{Bmatrix} 1/4 \\ -b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ a/12 \\ 1/4 \\ -b/12 \\ -a/12 \\ 1/4 \\ b/12 \\ -a/12 \end{Bmatrix} F_i = \begin{Bmatrix} F_{\omega i} \\ F_{\theta xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix}.$$

Если плита получает начальные деформации, вектор узловых сил, возникающих под влиянием этих начальных деформаций, и начальные напряжения могут быть найдены известным путем. Необходимо заметить в этой связи, что начальная деформация, возникающая, например, под влиянием увеличения температуры, в своем действии редко ограничивается только изменением кривизны. Обычно дополнительно появляются линейные деформации в плите, поэтому полная задача может быть окончательно решена лишь как задача о плоском напряженном состоянии.

39. Треугольный элемент

39.1. *Функции формы.* При первом рассмотрении может показаться, что снова можно использовать простое полиномиальное выражение в том же виде, какой был описан в предыдущей главе. Так как в данном случае существует только девять степеней свободы, то должно быть лишь девять членов разложения* При этом немедленно возникает затруднение, так как полное кубическое разложение содержит десять членов (VII.4), а любое отбрасывание производится произвольно. Для сохранения известной симметрии можно оставить все 10 членов, а два коэффициента сделать равными (например, $\alpha_8 = \alpha_9$) с тем, чтобы ограничить число неизвестных девятью. Было исследовано несколько подобных возможностей, но при этом возникает еще одно более значительное затруднение. Матрица, соответствующая [C], в уравнении (VII.5) становится особенной при определенной ориентации узлов треугольника. Это, например, происходит в том случае, если две стороны треугольника параллельны осям x и y .

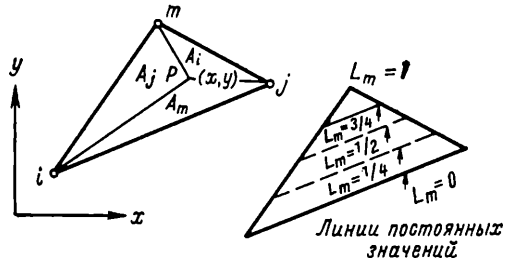


Рис. 45. Координаты площади $L_i = A_i/\Delta$; $L_j = A_j/\Delta$; $L_m = A_m/\Delta$; общая площадь $ijm = \Delta$

Это неудовлетворительное положение вещей вынуждает отказаться от элементарной процедуры, несмотря на то, что кубическое выражение автоматически дает функции, обеспечивающие непрерывность ψ (хотя перпендикулярных наклонов) вдоль граничных поверхностей элемента.

Координаты площади. Другой метод, который, как будет показано, ведет к удачной формуле, использует так называемые координаты площади. Определение таких координат дано на рис. 45. Любая точка $P(x, y)$ внутри треугольника ijm разбивает его, как это показано, на три отдельные площади. Эти площади или их отношение к общей площади треугольника единственно определяют положение P . Очевидно, только две такие координаты будут независимы. Назовем эти новые координаты

$$L_i = A_i/\Delta, \quad L_j = A_j/\Delta \quad \text{и} \quad L_m = A_m/\Delta, \quad (\text{VII.20})$$

где Δ есть общая площадь треугольника.

Дополнительные члены могут удерживаться и использоваться как параметры задачи. Такие попытки производились [4]. Физическое значение подобных членов не очевидно, и нет необходимости рекомендовать их применение для данного процесса.

Как уже было показано, она может быть записана с помощью узловых координат (см. главу III)

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (\text{VII.20})$$

в случае, если i, j и m следуют в порядке против часовой стрелки. Так как три площади должны складываться в общую площадь,

$$L_i + L_j + L_m = 1. \quad (\text{VII.21})$$

Линии, образующие постоянную L_n ($n=i, j, m$), есть прямые, параллельные стороне, лежащей напротив узла n , и, как показано на рис. 45, $L_n=0$ есть сторона элемента, противоположная узлу n . Это положение очень важно при формулировании функций формы, связанных с «естественным» применением таких координат к треугольным формам. Отношение трех координат площади к координатам x и y может быть записано с помощью определителей, описывающих соответствующие площади. Мы увидим, что

$$\begin{aligned} L_i &= (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta; \\ L_j &= (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta; \\ L_m &= (a_m + b_m x + c_m y)/2\Delta, \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= x_i y_m - x_m y_j; \\ b_i &= (y_i - y_m); \\ c_i &= (x_m - x_j) \end{aligned}$$

и т. д.¹.

Решая уравнение (VII.22) для x и y , мы можем получить следующий вид отношения:

$$\begin{aligned} x &= L_i x_i + L_j x_j + L_m x_m; \\ y &= L_i y_i + L_j y_j + L_m y_m. \end{aligned} \quad (\text{VII.23})$$

Относительное смещение. На данном этапе целесообразно использовать еще один прием, с помощью которого движения твердого тела исключаются из функций смещения². Чистое смещение

¹ Эти коэффициенты в действительности равны коэффициентам уравнения (III.5) и показывают, что такие координаты площади можно естественно получить из треугольных форм.

² Читатель, знакомый с расчетом сооружений с помощью матриц, узнает этот прием, который мы не вводили ранее из-за отсутствия такой необходимости.

элемента, не допускающее никакой кривизны, несомненно, не оказывает влияния на внутреннюю работу. Поэтому, если допустить, что элемент плиты имеет опоры просто в узлах и что в этих узлах имеются лишь угловые вращения, полные характеристики могут быть получены с помощью простого прибавления движения твердого тела. Пусть ω^* означает смещение простого опорного элемента. Истинное смещение ω находим

$$\omega = \omega^* + \omega^R, \quad (\text{VII.24})$$

где ω^R есть смещение твердого тела, не оказывающее никакого влияния на изгибы.

Смещение твердого тела находим с помощью линейной функции x и y , которая определяется из истинных движений узлов w_i , w_j , w_m . Это можно записать с помощью координат площади

$$\omega^R = w_i L_i + w_j L_j + w_m L_m. \quad (\text{VII.25})$$

Читатель может убедиться, что эта запись аналогична простым функциям формы, рассмотренным в главах III и IV

Для нахождения истинного смещения в узлах требуется определить только два компонента, так как ω^* равно нулю во всех узлах,

$$\{\delta_i^*\} = \begin{Bmatrix} (\theta_x)_i^* \\ (\theta_y)_i^* \end{Bmatrix}. \quad (\text{VII.26})$$

Сравним это с уравнением (VII.2), где требовалось определить три компонента. С помощью уравнений (VII.1) и (VII.24) устанавливаем отношение двух типов узлового смещения

$$\theta_x^* = - \frac{\partial \omega^*}{\partial y} = \theta_x + \frac{\partial \omega^R}{\partial y}, \quad (\text{VII.27})$$

$$\theta_y^* = + \frac{\partial \omega^*}{\partial x} = \theta_y - \frac{\partial \omega^R}{\partial x}.$$

Из уравнений (VII.25) и (VII.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^R}{\partial y} &= (c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m) / 2\Delta \\ \frac{\partial \omega^R}{\partial x} &= (b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m) / 2\Delta. \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

Теперь легко определяем связь общих смещений элемента с относительными смещениями

$$\{\delta^*\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \\ \delta_m^* \end{Bmatrix} = [T] \{\delta\}^e, \quad (\text{VII.29})$$

где матрица преобразования [T] 6×9 может быть записана как

$$[T] = \left| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_i & 2\Delta & 0 & c_j & 0 & 0 & c_m & 0 & 0 \\ -b_i & 0 & 2\Delta & -b_j & 0 & 0 & -b_m & 0 & 0 \\ \hline c_i & 0 & 0 & c_j & 2\Delta & 0 & c_m & 0 & 0 \\ -b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 2\Delta & -b_m & 0 & 0 \\ \hline c_i & 0 & 0 & -c_j & 0 & 0 & -c_m & 2\Delta & 0 \\ -b_i & 0 & 0 & -b_j & 0 & 0 & -b_m & 0 & 2\Delta \end{array} \right| \frac{1}{2\Delta}. \quad (\text{VII.30})$$

Приравняв работы, произведенные на каких-либо виртуальных перемещениях в каждой системе, легко показать, что соответствующие реакции в узлах в двух системах связаны соотношением

$$[T]^T \{F^*\}^e = \{F\}^e, \quad (\text{VII.31})$$

где

$$\{F_i^*\} = \left\{ \begin{array}{l} (F_{\theta x}^*)_i \\ (F_{\theta y}^*)_i \end{array} \right\} \quad (\text{VII.32})$$

определяется с помощью двух узловых пар в направлениях осей x и y (см. рис. 48), в то время как

$$\{F_i\} = \left\{ \begin{array}{l} (F_w)_i \\ (F_{\theta x})_i \\ (F_{\theta y})_i \end{array} \right\} \quad (\text{VII.33})$$

включает компонент силы F_w в направлении w .

Если теперь с помощью обычных вычислений мы найдем матрицу $[k^*]$ жесткости для простого опертого элемента, то матрица жесткости действительного элемента будет определяться

$$[k] = [T]^T [k^*] [T]. \quad (\text{VII.34})$$

Таким же образом матрицу напряжения, как читатель легко может убедиться, опять находим с помощью преобразования

$$[S] = [S^*] [T]. \quad (\text{VII.35})$$

Таким образом, сведение задачи к нахождению относительных смещений не только устраняет любые трудности, которые могут возникнуть в связи с деформацией твердого тела, но также и уменьшают размер исследуемых матриц. Все это производится за счет нескольких обычных умножений матрицы, которые, в конечном счете, легко проделать.

Относительные функции формы. Теперь попробуем найти функцию w^* , которая будет определяться с помощью узловых смещений обычным путем в линейном виде

$$w^* = [N_i, N_j, N_m] \begin{Bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \\ \delta_m^* \end{Bmatrix},$$

где

$$[N_i] = [N_{ix}, N_{iy}].$$

Или, в явной форме,

$$w^* = N_{ix}\theta_{ix}^* + N_{iy}\theta_{iy}^* + N_{jx}\theta_{jx}^* + N_{jy}\theta_{jy}^* + N_{mx}\theta_{mx}^* + N_{my}\theta_{my}^*. \quad (\text{VII.36})$$

Функции формы должны иметь такой вид, чтобы w^* был равен нулю в узлах (так как мы полагаем, что плита просто поддерживается в них).

Таким образом, в любом узле r

$$N_{rx} = N_{ry} = 0.$$

Кроме того, так как связь наклонов w с вращением определяется с помощью уравнения (VII.27), мы должны иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ix}}{\partial y} &= \begin{cases} 0 & \text{в узлах } j \text{ и } m \\ 1 & \text{в узле } i \end{cases} \\ \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} &= 0 \text{ во всех узлах} \\ \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} &= 0 \text{ во всех узлах} \\ \frac{\partial N_{iy}}{\partial x} &= \begin{cases} 0 & \text{в узлах } j \text{ и } m \\ 1 & \text{в узле } i \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{VII.37})$$

с аналогичными условиями для других функций. Если выбрать кубическое выражение, то непрерывность смещений, но не наклонов, будет сохраняться вдоль граничных поверхностей элемента.

Простейшими функциями, удовлетворяющими вышеуказанным условиям, будут

$$N_{ix} = (b_m L_j - b_j L_m) L_i^2$$

и

$$N_{iy} = (c_m L_j - c_j L_m) L_i^2$$

(VII. 8)

и т. д. циклической перестановкой i, j, m .

В том, что предписанные условия соблюдаются, можно легко убедиться.

Так как в любом узле две функции L равны нулю, то $N_{ix} = N_{iy} = 0$ в любом узле.

Функция является кубической относительно L , поэтому она будет кубической по x и y .

Используя уравнение (VII.22) и дифференцируя уравнение (VII.38), получим выражение

$$\begin{aligned} -2\Delta \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} &= (-b_m b_j + b_j b_m) L_i^2 + (-b_m L_j + b_j L_m) 2L_i b_i = \\ &= (-b_m L_j + b_j L_m) 2L_i b_i, \end{aligned}$$

которое будет равно нулю во всех узлах.

Аналогичным образом получаем

$$-2\Delta \frac{\partial N_{ix}}{\partial y} = (-b_m c_j + b_j c_m) L_i^2 + (-b_m L_j + b_j L_m) 2L_i c_i.$$

Последний член будет равен нулю во всех узлах, хотя первый член дает значение, отличное от нуля, в узле i . Вспомнив, что по определению

$$-b_m c_j + b_j c_m = 2\Delta,$$

получим

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial y} = -1 \text{ в узле } i.$$

Аналогичное доказательство сохраняет силу и для всех других функций.

К сожалению, выбранная функция не может соответствовать критерию «постоянная деформация», который необходим для схожимости.

Однако это легко поправить. Функция

$$L_i L_j L_m$$

по-прежнему является кубической, но она имеет нулевые значения как сама, так и ее производные во всех узлах. Она поэтому может быть прибавлена ко всем функциям формы в любой желаемой пропорции.

Так, мы можем, например, взять

$$N_{ix} = b_m (L_i^2 L_j + \alpha L_i L_j L_m) - b_j (L_i^2 L_m + \alpha L_i L_j L_m) \quad (\text{VII.39})$$

и

$$N_{iy} = c_m (L_i^2 L_j + \alpha L_i L_j L_m) - c_j (L_i^2 L_m + \alpha L_i L_j L_m),$$

где α есть любое число. Покажем, что только $\alpha = \frac{1}{2}$ есть единственный вариант для обеспечения постоянной кривизны (деформации). Для того чтобы выразить любые условия постоянной кри-

визны, необходимо, чтобы ω^* приняло форму общего квадратичного выражения

$$\omega^* = A_i L_j L_m + A_j L_m L_i + A_m L_i L_j, \quad (\text{VII.40})$$

в котором $A_{i, j, m}$ могут принимать любые предписанные численные значения. Уравнение (VII.40) включает в себя наклоны в узлах. Например, наклоны в узле i можно представить

$$\left. \begin{aligned} (\theta_x)_i &= -A_j c_m - A_m c_j \\ (\theta_y)_i &= A_j b_m + A_m b_j \end{aligned} \right\}. \quad (\text{VII.41})$$

Таким же образом можно представить наклоны в других узлах. Подставляя в уравнение (VII.36), получаем

$$\begin{aligned} 2\Delta\omega^* &= A_i (-c_m N_{jx} - c_j N_{mx} + b_m N_{iy} + b_j N_{my}) + A_j (-c_i N_{mx} - \\ &\quad - c_m N_{ix} + b_i N_{my} + b_m N_{iy}) + A_m (-c_j N_{ix} - c_i N_{jx} + \\ &\quad + b_j N_{iy} + b_i N_{jy}). \end{aligned} \quad (\text{VII.42})$$

Если сюда подставить выражения (VII.39), идентичность уравнений (VII.42) и (VII.40) будет иметь место только в случае $\alpha = \frac{1}{2}$. Это, в частности, доказывает, что функции, первоначально определенные уравнением (VII.38), не могут отвечать всем условиям постоянной «деформации».

39.2. Матрицы жесткости, нагрузки и деформации. Оценка матриц жесткости, распределенной нагрузки и т. д. не представляет принципиальных трудностей и определяется обычным методом. Определения матриц напряжения, деформации и упругости идентичны определениям, данным в разделах 38.2 и 38.3. Форма матрицы $[B]$ будет, очевидно, отличаться.

Если определение проводится в относительных координатах, то

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B^*] \begin{Bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \\ \delta_m^* \end{Bmatrix}, \quad (\text{VII.43})$$

а $[B^*]$ представляет собой 3×6 матрицу.

С помощью функции формы, определенной уравнениями (VII.36) и (VII.39), можно найти явный вид $[B^*]$.

Запишем покомпонентно

$$[B^*] = [B_i^*, B_j^*, B_m^*],$$

где

$$[B_i^*] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x^2}, & -\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial y^2}, & -\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_{ix}}{\partial x \partial y}, & 2\frac{\partial^2 N_{iy}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.44})$$

Матрица жесткости определяется как обычно

$$[k^*] = \iint [B^*]^T [D] [B^*] dx dy \quad (\text{VII.45})$$

или, вводя компоненты подматриц,

$$[k_{rs}^*] = \iint [B_r^*]^T [D] [B_s^*] dx dy. \quad (\text{VII.46})$$

Интегрирование в этом случае проводится по всей площади треугольника. Если для L используются соответствующие выражения уравнения (VII.22), то явное интегрирование производится с помощью формул для треугольников, даваемых в приложении III. Здесь появляются только квадратичные члены от x и y . Эти же замечания относятся к вычислению матриц напряжения и нагрузки. Окончательные выражения в явном виде слишком громоздки, поэтому мы их здесь опускаем. Здесь необходимо учитывать один момент в отношении матриц напряжения. Как и в прямоугольных элементах, внутренние моменты будут изменяться линейно. Однако в данном случае нарушение непрерывности напряжения будет более значительным. Поэтому желательно производить оценку напряжения только в центрах тяжести элементов, чтобы избежать необходимости последующего осреднения.

40. Четырехугольные элементы

Сложные четырехугольные элементы можно получить из треугольных элементов, как это было сказано в главе V. Снова можно использовать осредненные величины двух или четырех треугольников. Как мы увидим, в результате этой процедуры мы получим значительное улучшение представления напряжения. С помощью функций формы, полученных для прямоугольников, возможен прямой подход к четырехугольным элементам, с типом координат, описанных в главе V

Для общего случая четырехугольника этот подход требует численного интегрирования. Так как можно вывести другой вид функций формы, при которых обеспечивается непрерывность (см. параграф 42), эта процедура не подвергалась проверке вычислением.

Частной формой четырехугольника, для которого все интегрирования могут быть легко произведены явно, является параллелограмм.

В этом случае просто устанавливается связь координат $\eta-\xi$ с координатами x и y .

Из рис. 46 очевидно, что в этом случае мы получим

$$\begin{aligned}\eta &= (x - y \operatorname{ctg} \alpha)/a; \\ \xi &= (y \operatorname{cosec} \alpha)/b.\end{aligned}\tag{VII.47}$$

С помощью функций, определяемых из уравнения (VII.7) и т. д., заменив только x и y на новые переменные, мы можем без труда определить жесткость любого параллелограмма с любым наклоном.

Этот подход предложен Zienkiewicz и Cheung [2], а матрицы жесткости были получены в явном виде Dawe [6]. Численные результаты свидетельствуют о хорошей сходимости. Другой ряд функций формы для элемента параллелограмма был предложен Argyris [7]. Они тоже представляют кубические полиномы, которые обеспечивают непрерывность w , но нарушают непрерывность наклона на граничных поверхностях элемента.

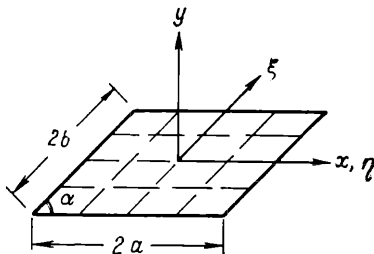


Рис. 46. Элементы в форме параллелограмма и косоугольные координаты

41. Примеры решений

41.1. Прямоугольные элементы. Составлена программа, основанная на функциях смещения, выведенных из уравнения (VII.2), а также решено несколько задач, иллюстрирующих точность и быстроту ожидаемой сходимости.

Квадратная изотропная плита. На рис. 47 графически показаны результаты, полученные при нагружении однородной нагрузкой квадратной плиты с защемленными краями. Даны только результаты разбивки на элементы 2×2 , 4×4 и 6×6 ; точность и общая сходимость являются хорошими. Линейное распределение моментов, каким оно принималось, имеет тенденцию наилучшим образом соответствовать точным распределениям момента для всех разбиений.

Точность и сходимость удачно демонстрируются в табл. 4. В ней сравниваются центральные прогибы при действии сосредоточенной и распределенной нагрузки с разнообразными условиями на краях. При разбивке на элементы 8×8 наибольшая ошибка составляет 3%. Во всех случаях при всех видах разбивки достигается сходимость.

Консольная плита. Такая же плита, но только представляющая из себя консоль, будет иметь смещения, которые показаны на

рис. 48. Результаты сравниваются с другими численными и экспериментальными решениями и опять наблюдается хорошая точность.

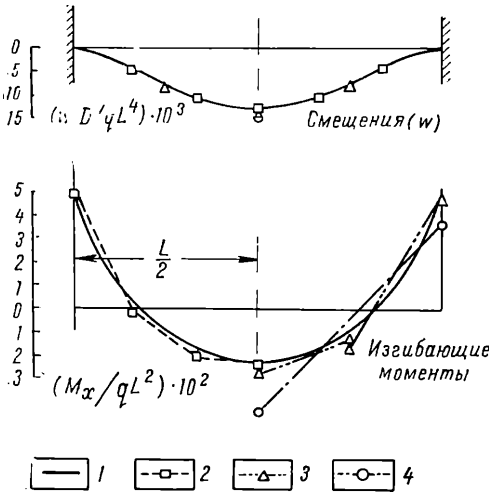


Рис. 47. Квадратная плита с защемленными краями. Равномерно распределенная нагрузка q . Квадратные элементы: 1 — разбивка 16×16 , решение методом конечных разностей (Southwell, 1956); 2 — разбивка 6×6 , решение методом конечных элементов; 3 — разбивка 4×4 , решение методом конечных элементов; 4 — разбивка 2×2 , решение методом конечных элементов

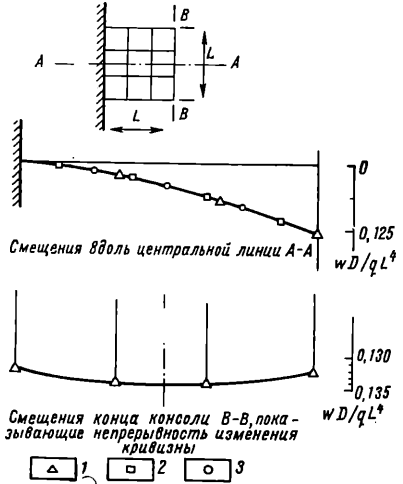


Рис. 48. Нагружение квадратной плиты, закрепленной как консольная балка (равномерно распределенная нагрузка g):

1 — разбивка 3×3 , решение методом конечных элементов; 2 — решение с помощью метода конечных разностей; разбиение 5×5 (Livesey, Birchall, 1956); 3 — экспериментальные величины (Dalley, 1948)

Таблица 4

Вычисленное значение прогиба в центре квадратной плиты для нескольких вариантов разбивки (прямоугольные элементы)

Разбивка	Общее число узлов	Свободно лежащая плита		Защемленная плита	
		равномерная нагрузка α	сосредоточенная нагрузка β	равномерная нагрузка α	сосредоточенная нагрузка β
(2×2)	9	0,003446	0,013784	0,001480	0,005919
(4×4)	25	0,003939	0,012327	0,001403	0,006134
(8×8)	81	0,004033	0,011829	0,001304	0,005803
(12×12)	169	0,004050	0,011715	0,001283	0,005710
(16×16)	289	0,004056	0,011671	0,001275	0,005672
Точная (Тимошенко)	—	0,004062	0,01160	0,00126	0,00560

$w_{\max} = \alpha q L^4 / D$ для равномерно распределенной нагрузки q ;

$w_{\max} = \beta F^2 / D$ для силы, приложенной в центре P . (по Tocher J. L., Кариг К. К. [8]).

Таблица 5

	Точка 1		Точка 2	
	w	M_x	w	M_x
Конечный элемент				
2×2	0,0126	0,139	0,0176	0,095
4×4	0,0165	0,149	0,0232	0,108
6×6	0,0173	0,150	0,0244	0,109
Marcus	0,0180	0,154	0,0281	0,110
Lee and Ballesteros	0,0170	0,140	0,0265	0,109
Множитель	qL^4/D	qL^2	qL^4/D	qL^2

Примечание: точка 1 — центр стороны; точка 2 — центр плиты.

Плита, опертая по углам [2]. Проводились различные экспериментальные и приближенные аналитические расчеты квадратной плиты, опертой по углам [2]. В табл. 5 результаты решения методом конечных элементов сравниваются с некоторыми другими приближенными вычислениями. Даже в этом случае, когда концентрация в углах может привести к затруднениям, видно вполне приемлемое согласование смещений и напряжений.

41.2. Треугольные элементы — квадратная изотропная плита. Для иллюстрации сходимости снова берем квадратную плиту. Разбиваем ее на треугольные элементы в различной комбинации. Некоторые из них образуют квадратную сетку, некоторые имеют совершенно неправильную форму.

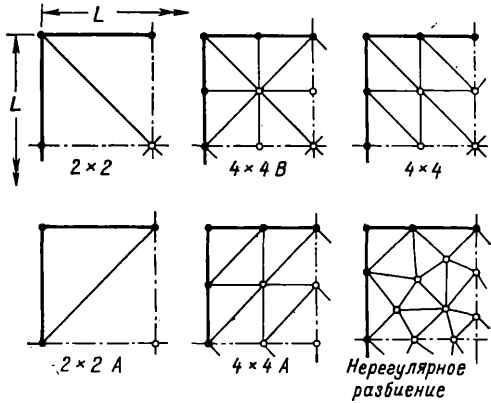


Рис. 49. Различные типы разбивки квадратной плиты на элементы (треугольники)

На рис. 49 показаны различные типы разбивки на элементы; на рис. 50 показаны смещения, полученные для различных граничных условий и различных условий нагрузок. Точность и сходимость вычисленных смещений снова хорошая (хотя, возможно, не такая хорошая, как в случае четырехугольных элементов).

На рис. 51 показано изменение изгибающих моментов на типовой центральной линии сечений. Если взять средние величины, то эти моменты хорошо сравниваются с точными величинами. Однако мы не можем утверждать, что линейное изменение напряжений следует «наилучшему соответствию» истинного распределения

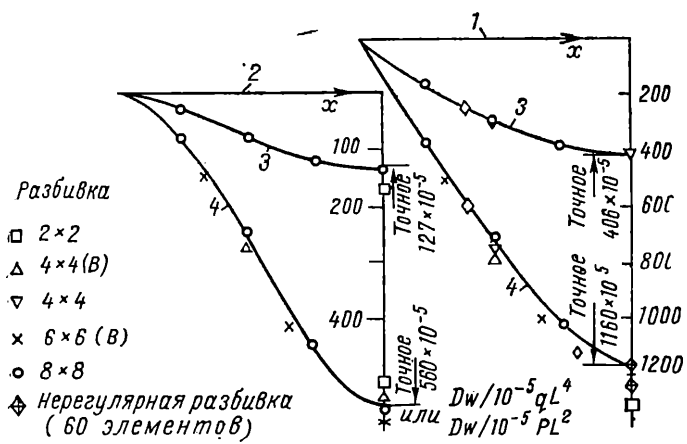


Рис. 50. Квадратная плита. Смещения на центральной оси (треугольные элементы):
 1 — свободно опертая поверхность; 2 — защемленные края; 3 — распределенная нагрузка (Southwell); 4 — концентрированная нагрузка

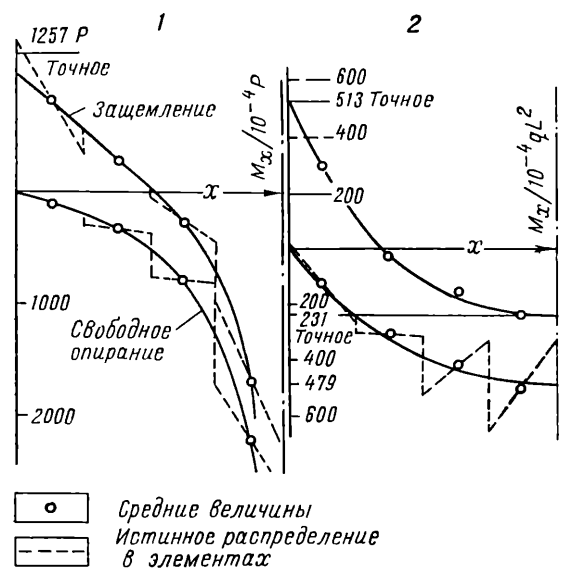


Рис. 51. Квадратная плита. Распределение M_x на центральной оси (треугольные элементы):
 1 — нагрузка p в центре плиты; 2 — распределенная нагрузка q

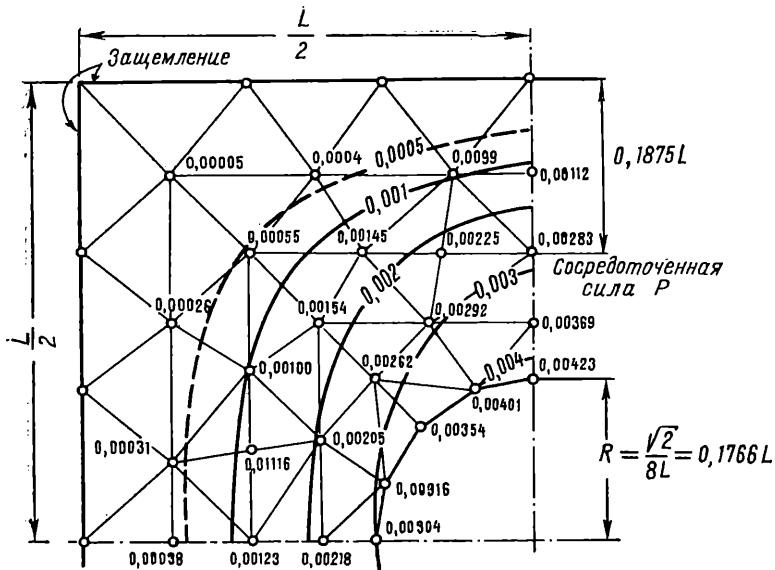


Рис. 52. Квадратная плита с отверстием. Линии равных значений смещения (wD/pL^2). (Показано разбиение на треугольные элементы)

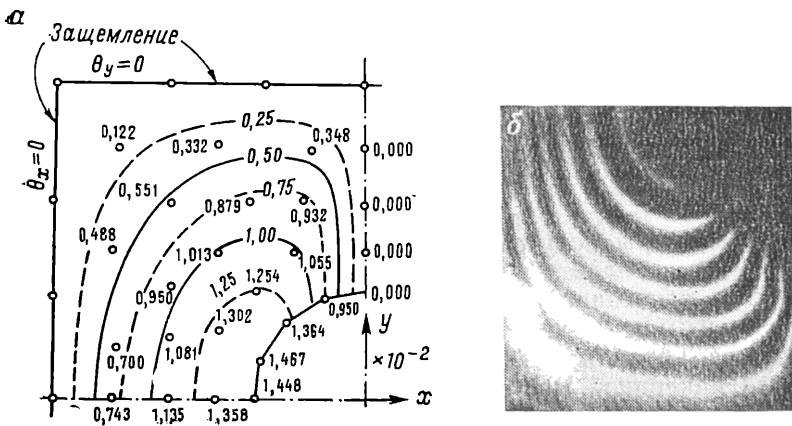


Рис. 53. Квадратная плита с отверстием. Линии равных углов на-
клонов $\left(\theta_v = \frac{\sigma W}{\sigma X} D/pL\right)$

а — вычислено по методу конечных элементов; б — найдено из эксперимента методом Муара

напряжений. При решении практических задач мы поэтому рекомендуем обратить внимание на напряжения (моменты) в центре тяжести элементов.

Плита с круглым отверстием в центре. Хотя для этого примера невозможно получить какого-либо точного решения, мы включаем его для иллюстрации многообразия треугольных элементов при рассмотрении вопросов отверстий и границ любой формы.

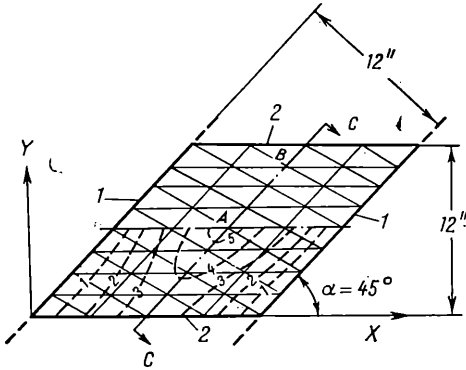


Рис. 54. Свободно опертая плита с наклоном 45° . Разбиение на треугольные элементы. Толщина 0,25 дюйма, $E = 30 \times 10^6$ фунтов/кв. дюйм, $\nu = 0,3$:
1 — свободно опертый участок; 2 — свободный участок; линии смещения, вычисленные для нагрузки в 80 фунтов в точке А ($w \times 10^3$ дюйма)

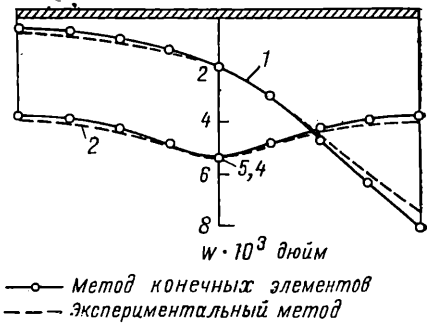


Рис. 55. Наклонная плита из рис. 54. Прогиб по линии C—C. Нагрузка в 80 фунтов в точках А и В.
1 — нагрузка в точке В; 2 — нагрузка в точке А

На рис. 52 представлена графически разбивка на элементы вместе со значениями прогибов w . На рис. 53 линии наклона сравниваются с экспериментальным решением (метод Муара). Согласование находится в пределе допустимой экспериментальной ошибки.

41.3. Некоторые случаи практического применения. Диапазон практического использования вычислительной программы, особенно программы, основанной на треугольных элементах, очень широк. В частности, можно решать задачи опорных плит настила моста или корпуса корабля. На рис. 54—56 показаны некоторые результаты для наклонной мостовой плиты. Приведенные данные сравниваются с экспериментальным решением этой же задачи, полученным К. Е. Robinson (Cement and Concrete Research Association, Research Report No. 8, Nov. 1959).

Здесь показано изотропное однородное состояние. Очевидно, используя метод конечных элементов, мы не встретим трудностей при решении в случае анизотропии, усиления или изменения тол-

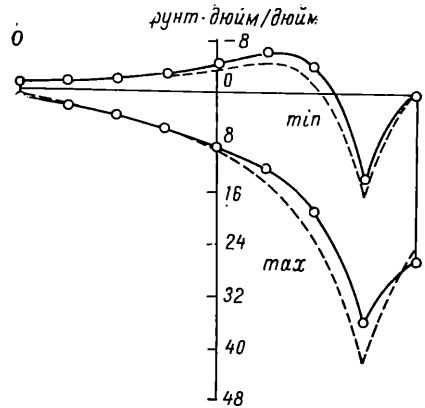
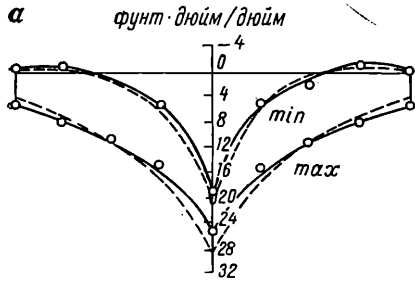


Рис. 56. Наклонная плита из рис. 54. Главные изгибающие моменты на линии С—С. Нагрузка 80 фунтов в точке А(а) и в точке В(б) (условные обозначения те же, что и на рис. 55)

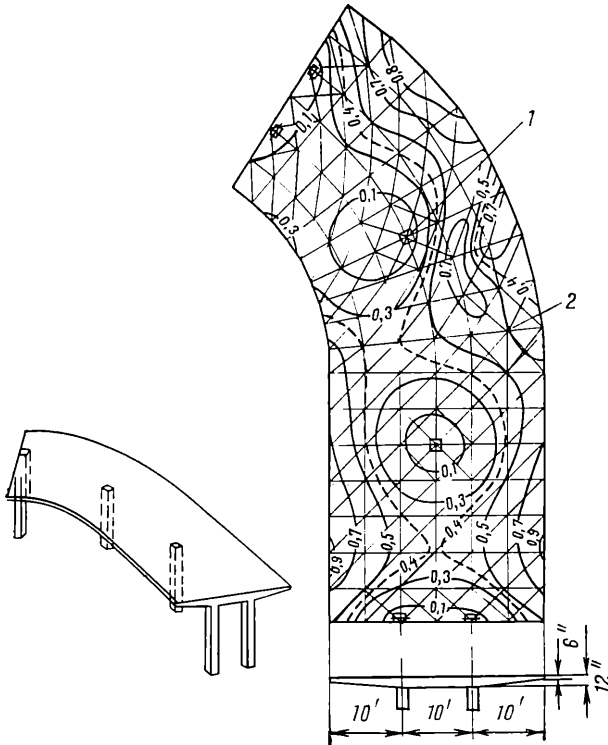


Рис. 57. Расчет напряженного состояния моста с помощью конечных элементов треугольной формы. Линии равных значений прогибов (в дюймах) представлены графически в функции от собственного веса, дополнительной нагрузки в 80 фунтов/кв. фут и сосредоточенной нагрузки;
1 — опоры; 2 — точка приложения нагрузки (6000 фунтов)

щины плиты моста. На рис. 57 показан сложный проверочный расчет прочности моста различной толщины того типа, который может встретиться на практике.

СОГЛАСУЮЩИЕСЯ ФОРМЫ ФУНКЦИИ

42. Общие замечания

Определение функций формы для поперечного смещения w , которые удовлетворяли бы условию полной непрерывности между элементами, представляет определенные трудности.

Рассмотрим сначала вид границы раздела элементов, которые мы уже обсуждали.

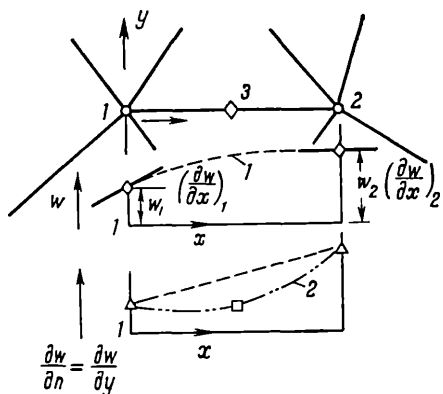


Рис. 58. Условия непрерывности на граничной поверхности 1—2 при условии, что w является полиномом от x и y . Если в точке 3 величина $\partial w / \partial n$ будет заданной, то параболическое изменение $\partial w / \partial n$ является единственным:

1 — кубическое изменение; 2 — параболическое изменение

Имеются две узловые точки концов такой границы (рис. 58); в этих точках достигается равенство величин w , $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ между двумя элементами, которые граничат вдоль этой линии. Если w вдоль границы, которая для удобства последующих доказательств, располагается вдоль оси x , изменяется по кубическому закону, то величина w единственным образом определяется двумя величинами $\partial w / \partial x$ и w на каждом конце прямой. Так как для обоих элементов эти величины равны, то w будет непрерывной, о чем мы уже упоминали ранее.

Для того чтобы обеспечить непрерывность наклона нормали $\partial w / \partial y$ вдоль граничной поверхности, необходимо так-

же добиться, чтобы это изменение происходило единственно вдоль поверхности 1—2. Один из способов добиться этого заключается в том, что вдоль такой поверхности устанавливается линейное изменение $\partial w / \partial y$. В этом случае две величины $\partial w / \partial y$ в узлах 1 и 2 автоматически обеспечивают непрерывность наклона нормали между двумя элементами.

Эта процедура, которой мы будем следовать в дальнейшем при рассмотрении треугольных элементов, представляет определенную трудность. Мы увидим, что введение определенных выше условий дает не единственное определение производной $d^2 w / dx dy$ в узлах элемента [9], и поэтому функция w не может быть найдена во всем элементе с помощью единственного полинома. Хотя требование сходимости не выполняется, на это можно не обращать внимания,

и оно не будет влиять на решение в случае, если в узлах не появляется бесконечных значений w . Такие функции были впервые с успехом использованы для решения Bazeley et al. [5] и Clough et al. [10].

Другой метод единственного определения dw/dy вдоль границы 1—2 (см. рис. 58) заключается в том, что кубическое изменение этой величины допускается, но произвольно устанавливается нулевой наклон ее в узлах. Такой подход использовался Schmit et al. [11], где функция смещения формировалась с помощью полиномов Эрмита.

К сожалению, установление нулевых наклонов в направлении x для dw/dy требует, чтобы $d^2w/dxdy=0$ в узлах элемента.¹

Это нарушение требования выполнить условие «постоянства деформации» может в действительности вызвать расходимость. Для обеспечения совместности наклона нормали вдоль граничной поверхности необходимо ввести вдоль нее дополнительный узел, на котором будет задан только этот наклон нормали. Такой узел, обозначенный на рис. 58 номером 3, позволяет обеспечить условия непрерывности, если dw/dy изменяется параболически (три точки единственно определяют параболу). При этом подходе можно столкнуться с трудностью, впервые замеченной Sander [12] и Vebeke [13], так как теперь при решении следует различать два различных типа узла, т. е. такие, в которых допускаются три степени свободы, и такие, в которых допускается только одна.

43. Использование «корректирующих» функций

В первой части этой главы мы получили функции формы для четырехугольных, прямоугольных и треугольных элементов, которые, являясь кубическими, удовлетворяли условию непрерывности w . Эти функции определяли параболическое изменение наклонов нормалей вдоль сторон элемента, которое обычно приводит к разрыву непрерывности этого наклона между элементами.

Представим теперь, что может быть составлен ряд функций Φ , каждая из которых связана со стороной элемента, и что эти функции имеют следующие характеристики:

величина Φ равна нулю на каждой стороне;

величина $d\Phi/dn$ будет нулевой на всех сторонах, за исключением только одной, с которой связана эта функция и на которой $d\Phi/dn$ будет изменяться параболически;

функции имеют непрерывные величины Φ и ее наклонов во всем элементе.

Такие «корректирующие» функции могут в любой пропорции добавляться к начальной функции смещения, не изменяя узловых величин или $\{\delta\}^e$.

При добавлении корректирующих функций мы можем либо обеспечить линейное изменение наклона нормали вдоль каждой

¹ Другой подход к решению этого вопроса обсуждается в главе XIV

стороны, либо задать величину наклона нормали в дополнительном узле, который был бы помещен вдоль каждой стороны, и этим обеспечить параболическое изменение наклона вдоль этих сторон.

Таким образом, мы обеспечиваем первую или последнюю из возможностей, которые обсуждались в параграфе 42.

После того как соответствующие корректирующие функции для элемента будут найдены, остается применить простые, хотя и длинные, алгебраические вычисления. Рассмотрим, например, ряд функций Φ_{ij} , Φ_{jm} , Φ_{ms} , ..., связанных со сторонами многоугольника, где каждая из этих функций дает наклон нормали, равный 1 в средней точке соответствующей стороны.

Если нам известна первоначальная (кубическая) функция $[\omega^0]$, можно записать все величины наклонов нормалей в средних точках сторон как

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \omega^0}{\partial n} \right)_{ij} \\ \left(\frac{\partial \omega^0}{\partial n} \right)_{jm} \end{array} \right\} = [Z] \{\delta\}^e, \quad (\text{VII.48})$$

где ω^0 обозначает первоначальную функцию формы $[N^0] \{\delta\}^e$.

Корректирующие функции, прибавляемые в пропорции

$$\gamma_1 \Phi_{ij} + \gamma_2 \Phi_{jm} + \quad \text{и т. д.}$$

изменяют величину наклонов нормали в средних точках сторон на величины, равные $\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$.

Если мы зададим линейное изменение наклона нормали вдоль сторон, то в средних точках сторон наклоны нормали будут равны средним величинам наклонов в узловых точках т. е.:

$$[Y] \{\delta\}^e.$$

Сравнивая, получаем

$$[Z] \{\delta\}^e + \{\gamma\} = [Y] \{\delta\}^e, \quad (\text{VII.49})$$

где

$$\{\gamma\} = ([Y] - [Z]) \{\delta\}^e.$$

Окончательно для скорректированной функции смещения получаем

$$\omega = [N]^0 \{\delta\}^e + [\Phi_{ij}, \Phi_{jm} \dots] ([Y] - [Z]) \{\delta\}^e, \quad (\text{VII.50})$$

где последний член представляет величину корректирующей добавки. Влияние этой коррекции на матрицы жесткости и т. д. может быть определено отдельно, а также произведена оценка

важности нарушения соответствующего наклона. В следующих разделах будут введены некоторые корректирующие функции. На данной стадии нам представляется более целесообразным сначала рассмотреть треугольные элементы, а позже прямоугольные или четырехугольные.

44. «Корректирующие» функции для треугольного элемента

В работе Bazeley et al. [5] представлены три системы корректирующих функций для треугольного элемента того типа, который показан на рис. 45. Мы здесь приведем только две из этих систем. Для стороны треугольника jm эти функции задаются как

$$(I) \quad \Phi_{jm} \equiv \Phi_i = \frac{L_i L_j^2 L_m^2}{(L_i + L_j)(L_i + L_m)} \quad (VII.51)$$

(II) Допуская, что треугольник разбивается точкой центра тяжести P на три площади, функцию определяют кусочно для каждой из них:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{jm} \equiv \Phi_i &= L_i^2 (5L_i^2 - 3L_i + 6L_m L_j) / 6; \\ &\text{для треугольника } imP \text{ (рис. 45)} \\ \text{для треугольника } miP &= L_j^2 (3L_m - L_j) / 6 \\ \text{для треугольника } ijP &= L_m^2 (3L_j - L_m) / 6 \end{aligned} \right\} \quad (VII.52)$$

Корректирующая функция в такой формулировке даст результаты, идентичные функциям, выведенным Clough и Tocher [10] другим способом (для других сторон перестановка индексов дает соответствующие функции).

Читатель сможет убедиться, что эти функции действительно удовлетворяют условиям, изложенным в параграфе 43.

С помощью аргументов, которые мы приводили при выводе уравнений (VII.48) — (VII.50), можно показать, что если требуется линейное изменение наклона нормали, функции формы, определяемые уравнением (VII.39), могут быть преобразованы

$$\begin{aligned} -N_{ix} &= b_j \left(L_i^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m + \chi_{ij} \right) - \\ &- b_m \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m + \chi_{im} \right), \end{aligned} \quad (VII.53)$$

где

$$\begin{aligned} -N_{iy} &= c_j \left(L_i^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m + \chi_{ij} \right) - c_m \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m + \chi_{im} \right), \\ \chi_{ij} &= -\frac{1}{2} \Phi_i + \frac{1}{2} \Phi_j + \left[\frac{b_m (b_j - b_i) + c_m (c_j - c_i)}{c_m^2 + b_m^2} \right] \Phi_m. \end{aligned} \quad (VII.54)$$

Введение корректирующих функций для получения матриц жесткости и напряжения будет производиться на основании обычной процедуры, но в данном случае в связи со сложностью выражений потребуется численное интегрирование. Необходимо заметить, что применение корректирующих функций не нарушает условия «постоянной деформации», если первоначальная функция соответствует этому условию. Очевидно, при условии «постоянного напряжения» (или постоянной кривизны) множители перед скобками в корректирующих функциях будут равны нулю, так как изменение наклона будет теперь носить линейный характер в любом направлении.

Вывод, сделанный в параграфе 43 о неединственности производной $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ в узлах, может быть теперь легко подтвержден.

45. Функции соответствия для четырехугольных элементов

Четырехугольник произвольной формы может быть разбит на два или четыре треугольника, как показано на рис. 59, а и б.

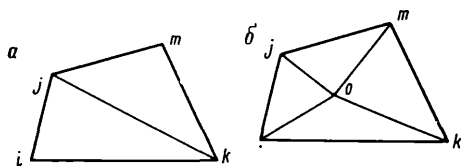


Рис. 59. Разбивка четырехугольников произвольной формы на треугольники, для которых можно определить корректирующие функции

Для каждого из таких треугольников корректирующие функции находятся с помощью выражений, приводимых в параграфе 44.

Так как корректирующая функция для стороны ij треугольника ijk на рис. 60, а дает нулевые величины ω и наклон нормали по отношению к диагонали jk , она автоматически становится корректирующей функцией для стороны ij четырехугольника, если она дополняется $\Phi_{ij} = 0$ внутри треугольника jmk .

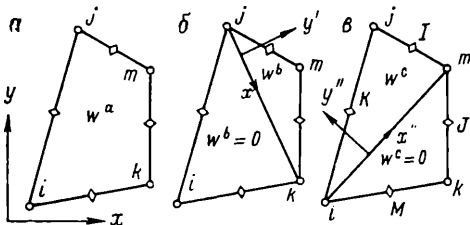


Рис. 60. Функции совместности, предложенные Graeijls de Veubeke

Такой же метод можно применить при разбиении, показанном на рис. 60, б. Здесь Φ_i определяется с помощью выражений для треугольника внутри ijk и равняется нулю в оставшихся треугольниках.

Составить комбинацию таких корректирующих функций для произвольных условий довольно трудоемко, поэтому можно использовать подход, разработанный Sander [12] и Veubeke [13]. При этом функция соответствия для смещения формулируется непо-

средственно. Допустим, что общее смещение должно быть определено в четырехугольнике с помощью трех отдельных функций (см. рис. 60).

$$\omega = \omega^{(a)} + \omega^{(b)} + \omega^{(c)} \quad (\text{VII.55})$$

Первая функция $\omega^{(a)}$ является полной кубической, включающей десять произвольных постоянных (см. рис. 60, *a*),

$$\begin{aligned} \omega^{(a)} = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \end{aligned} \quad (\text{VII.56})$$

Вторая функция определяется как кусочная. В нижнем треугольнике под диагональю jk она принимается за нуль, в верхнем треугольнике — за кубическое выражение, включающее три постоянных, которое при отсутствии разрыва непрерывности наклона переходит в область нижнего треугольника. В координатах, определяемых по фигуре, которую мы берем, для треугольника ikm :

$$\omega^{(b)} = \alpha_{11} y'^2 + \alpha_{12} y'^3 + \alpha_{13} x' y'^2. \quad (\text{VII.57})$$

Третья функция, показанная на рис. 60, определяет также $\omega^{(c)}$ равным нулю внутри треугольника ikm и как

$$\omega^{(c)} = \alpha_{14} y''^2 + \alpha_{15} y''^3 + \alpha_{16} x'' y''^2 \quad (\text{VII.58})$$

в треугольнике ijm .

Шестнадцать постоянных могут быть определены, как это предлагают Sander и Veubeke [12, 13] с помощью двенадцати компонентов смещения в угловых узлах и четырех наклонов нормали, взятых в средних точках сторон (точки I, J, M, K). Это обычно можно сделать с помощью численного решения соответствующей системы уравнений.

Другой метод, не требующий определения специальных узлов в средних точках, заключается в том, что мы предписываем линейное изменение наклона нормали, т. е. определяем наклон нормали в средней точке как среднюю величину наклона нормали (в соответствующем направлении) на угловых узлах. Этот тип элемента еще не проверен на практике, но ясно, что он дает относительно простое совместное решение для общего четырехугольника с четырьмя угловыми узлами.

46. Некоторые примеры решения с согласующимися элементами

Существуют немного решений для элементов плиты, у которых функции смещения полностью согласованы. В табл. 6 представлены результаты решения, полностью отвечающие данным в табл. 4. Исследовалась задача квадратной плиты с различными сторонами при различной нагрузке.

При решении использовались треугольные элементы, у которых узловые точки располагались в виде квадратной сетки, как пока-

Вычисленные центральные прогибы квадратной плиты для нескольких видов разбиения (треугольные элементы)

Вид разбиения	Свободно опертая плита						Защемленная плита					
	α (распределенная нагрузка)			β (сосредоточенная нагрузка)			α (распределенная нагрузка)			β (сосредоточенная нагрузка)		
2×2	—	—	—	0,01302	0,60855	0,00798	0,00172	—	—	0,00521	0,00193	0,00169
2×2A	—	—	0,00220	—	—	0,008	—	—	0,00026	—	—	0,001
4×4	0,00413	0,00376	0,00371	0,01176	0,01057	0,01039	0,00157	0,00123	0,00120	0,00589	0,00474	0,00461
4×4A	—	—	0,00356	—	—	0,0105	—	—	0,00100	—	—	0,0042
6×6B	0,00413	0,00384	0,00382	0,01211	0,01117	0,01108	0,00135	0,00117	0,00116	0,00583	0,00511	0,00503
8×8	0,00405	—	—	0,01165	—	—	0,00134	—	—	0,00572	—	—
8×8A	—	—	0,00392	—	—	0,0113	—	—	0,00121	—	—	0,0052
16×16A	—	—	0,00401	—	—	0,0115	—	—	0,00125	—	—	0,0055
Точная	0,00406	—	—	—	0,01160	—	—	0,00126	—	—	0,00560	—

$w_{\max} = \alpha q L^4 / D$ — для однородно распределенной нагрузки q .

$w_{\max} = \beta P L^2 / D$ — для нагрузки, сосредоточенной в центре P .

Все виды разбиения треугольников основаны на квадратной сетке, показанной на рис. 49.

Первая колонка включает данные, основанные на несогласующемся неисправленном треугольнике, вторая колонка включает корректирующую функцию, определяемую из уравнения (VII.51), третья колонка — корректирующую функцию, определяемую из уравнения (VII.52)

зано на рис. 49. В первом столбце даны результаты, полученные от несогласованной функции, а другие две колонки содержат данные, полученные при применении корректирующих функций, основанных соответственно на уравнениях (VII.51) и (VII.52).

При всех используемых видах разбивки на элементы оказалось, что корректирующие функции дали менее точное приближение. Читатель, однако, должен учесть, что сходимость будет монотонной и всегда, как ожидается, будет давать нижнюю границу величин средних смещений. Невозможно определить, на какой стадии разбиения будут проявляться преимущества решения с согласованными элементами. Если решение с несогласованными элементами сходится к неправильным величинам, то такая стадия должна появиться.

Если же сходимость при решении с несогласованными элементами может быть доказана, то будет установлено их преимущество в данной задаче с изгибом плиты.

47. Исследование сходимости несогласованных решений

Можно произвести относительно простое исследование для определения сходимости в случае, когда размер разбиения обычной сетки непрерывно уменьшается. Если участок, содержащий большое число элементов, будет подвержен различным налагаемым условиям постоянства кривизны на сторонах, то моменты и деформации на этом участке должны точно соответствовать моментам и деформациям континуума. Последнее, в случае уменьшения размеров разбиения, будет автоматически приводить к континууму, а следовательно, сходимость будет получена. Такая проверка, относящаяся к расчету плиты с «несогласующимися» прямоугольниками и сеткой треугольников одинаковых размеров, полученных в результате пересечения параллельных диагоналей однородных параллелограммов (см. рис. 49), точно удовлетворяет требуемым условиям и поэтому при таком разбиении обеспечивается сходимость [5].

С другой стороны, при разбивке типа плиты, показанной на рис. 49 (тип *B*), в средней величине напряжения может возникнуть ошибка до 1,5%. Такие же ошибки могут появиться в пределах сходимости при рассмотрении неоднородных элементов. Можно оценить порядок предела ошибки, возникающей при использовании несогласующихся элементов, описанных в этой главе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 2nd ed., 1959.

2. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Inst. Civ. Eng., 28 pp. 471—88, 1964.

3. R. J. Melosh, Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, *J. A.I.A.A.*, 1, pp. 1631—37, 1963.
4. R. W. Clough, The finite element method in structural mechanics, chapter 7 of *Stress Analysis*, ed O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, J. Wiley, 1965.
5. G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz; Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech. Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965 (October).
6. D. J. Dawe, Parallelogram element in the solution of rhombic cantilever plate problems, *J. of Strain Analysis*, 3, 1966.
7. J. H. Argyris, Continua and Discontinua, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965 (October).
8. J. L. Tocher and K. K. Kapur, Comment on Basis of derivation of matrices for direct stiffness method, *J. A.I.A.A.*, 3, pp. 1215—16, 1965.
9. B. M. Irons and K. J. Draper, Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending, *J. A.I.A.A.*, 3, n. 5, 1965.
10. R. W. Clough and J. L. Tocher, Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965 (October).
11. F. K. Bogner, R. L. Fox, L. A. Schmit, The generation of inter element—compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965 (October).
12. C. Sander, Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion, *Bull. Soc. Royale. des Sc. de Liège*, 33, 1964, pp. 456—94.
13. B. Fraeijs de Veubeke, Bending and Stretching of Plates, *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965 (October).

ОБОЛОЧКИ КАК СОВОКУПНОСТЬ ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

48. Вступление

Оболочка, в сущности, есть конструкция, которая может быть представлена в виде тонкой пластинки со срединной поверхностью, первоначально близкой к поверхности одинарной (или двойной) кривизны. Хотя те же допущения в отношении поперечного распределения напряжений и деформаций сохраняются и в данном случае, схема работы оболочки при приложении внешних нагрузок совершенно отлична от плоских плит. Результирующие напряжения, действующих параллельно срединной поверхности оболочки, имеют теперь компоненты, перпендикулярные к поверхности, и несут основную часть нагрузки. Этот факт объясняет экономичность оболочек как несущих нагрузку сооружений и их заслуженную распространенность.

Подробный вывод определяющих уравнений для задач с криволинейными оболочками представляет много трудностей и ведет к разнообразным дополнительным формулам, каждая из которых зависит от вводимых допущений. Подробности классического подхода к оболочкам читатель может найти в учебнике Flügge [1]. При решении задач с оболочками методом конечных элементов, который будет изложен в этой главе, вышеуказанные трудности устраняются в связи с введением дальнейших допущений. Эти допущения носят скорее физический, а не математический характер. При этом допускается, что реакция непрерывно изогнутой поверхности может быть равноценно представлена как реакция поверхности, состоящей из небольших плоских элементов. Поскольку размер разбиения уменьшается, можно предположить, что сходимость будет обеспечена, что подтверждается на практике. После того как узловые нагрузки (или массы) будут приложены, необходимо учесть одно важное обстоятельство. В предыдущих примерах нам было удобнее производить совместное задание таких нагрузок и масс в узлах для того, чтобы лучше описать локальные эффекты. Теперь для совместности с физическим эффектом замены изогнутой поверхности на ряд связанных пластин будет столь же целесообразно заменить распределенную нагрузку на статически эквивалентные узловые силы. Это можно наилучшим образом проиллюстрировать на примере задачи о круговой арке, которая показана на рис. 61.

Задачу о круговой арке под действием внешней распределенной нагрузки целесообразнее рассматривать как сегментную арку с эквивалентной статической нагрузкой (рис. 61, а), чем ту же полигональную арку под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 61, б).

Правильность этого положения может быть легко установлена, если мы начертим соответствующие многоугольники сил.

В оболочке элемент обычно подвергается воздействию сразу двух сил — сил изгиба и сил, «действующих в плоскости». В плоских элементах эти силы вызывают независимые деформации в

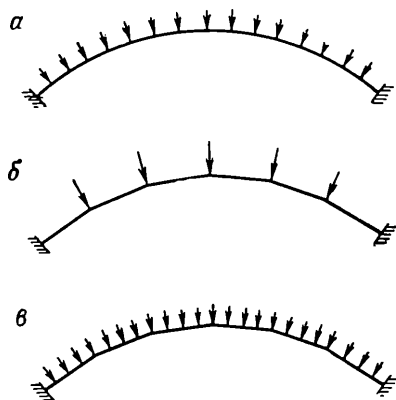


Рис. 61. Представление оси арки в виде совокупности прямых (а). Нагружение на схеме б лучше отвечает условию задачи, чем нагружение на схеме в

случае, если локальные деформации невелики, поэтому составные части для необходимых матриц жесткости могут быть получены, исходя из объяснений, уже данных в этой книге. При разбиении произвольной оболочки на плоские элементы используются только треугольные элементы, хотя идея использования таких элементов при решении была предложена еще в 1961 г. Greene et al. [2]. Успеху подобного расчета препятствовало отсутствие хорошей матрицы жесткости для треугольных элементов плиты при изгибе [3, 4]. Выводы, представленные в главе VII, дают возможность создания соответствующих моделей для характеристики поведения оболочек с помощью такого разбиения.

Некоторые оболочки, например оболочки общей цилиндрической формы, могут быть представлены в виде плоских элементов четырехугольной или прямоугольной формы. При наличии хороших матриц жесткости для таких элементов результаты были весьма успешными. Практические задачи проектирования арочных плотин и другие задачи для перекрытий цилиндрической формы решались с помощью такого разбиения [5, 6]. Возможности расчета конструкций с оболочками с помощью метода конечных элементов очень велики.

Задачи с отверстиями, изменением толщины или анизотропией не представляют особых затруднений после того, как будут написаны общие вычислительные программы.

Особый случай представляют осесимметричные оболочки. Хотя и эти задачи могут решаться методом, изложенным в этой главе, можно использовать более простой подход. Такой подход будет описан в главе IX.

49. Жесткость плоского элемента в локальной системе координат

Рассмотрим типичный полигональный плоский элемент, подвергаемый одновременно воздействию сил изгиба и сил в плоскости (рис. 62).

Если рассмотреть сначала силы в плоскости (плоское напряженное состояние), то нам известно из главы III, что состояние деформации единственным образом описывается функциями u и v смещений каждого типичного узла i . Минимизация общей потенциальной энергии дает матрицу жесткости, описанную в главах III и V, где

$$\begin{Bmatrix} F_i^p \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = [k^p] \begin{Bmatrix} \delta_i^p \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} \delta_i^p = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \\ F_i^p = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (\text{VIII.1})$$

Таким же образом при рассмотрении изгиба состояние деформации определялось единственным образом с помощью узлового смещения в направлении $z(\omega)$ и двух моментов вращения θ_x и θ_y . В результате получаем матрицы типа

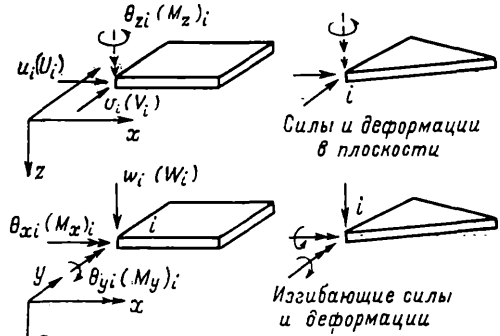


Рис. 62. Плоский элемент, подвергаемый действию сил изгиба и сил в плоскости

$$\begin{Bmatrix} F_i^b \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = [k^b] \begin{Bmatrix} \delta_i^b \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} \delta_i^b = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \\ F_i^b = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (\text{VIII.2})$$

Прежде чем производить комбинирование этих двух матриц жесткости, необходимо учесть два фактора. Во-первых, что смещения, предписанные для сил в плоскости, не влияют на деформации изгиба и наоборот. Во-вторых, что вращение θ_z не входит в качестве параметра в определение деформаций в любую из этих двух форм. Хотя на данной стадии этим можно пренебречь, нам представляется желательным по причинам, которые будут изложены далее, при рассмотрении задач объединения принять к сведению это вращение и связать с ним фиктивную пару M_z . Факт, что он не входит в процесс минимизации, можно учесть, просто поставив в матрицу жесткости соответствующее число нулей.

Снова определив теперь комбинированные узловые смещения как

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}, \quad (\text{VIII.3})$$

где соответствующие силы

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix}, \quad (\text{VIII.4})$$

можно записать

$$\{F_i\} = [k] \{\delta_i\},$$

или

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e. \quad (\text{VIII.5})$$

Матрицу жесткости теперь получаем из следующих подматриц:

$$[k_{rs}] = \begin{bmatrix} [k_{rs}^p] & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & [k_{rs}^b] & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}, \quad (\text{VIII.6})$$

если мы заметим, что

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^p \\ \delta_i^b \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}. \quad (\text{VIII.7})$$

Эта формула действительна для многоугольного элемента любой формы, в частности, для двух важных случаев, показанных на рис. 62.

В главе XIV будут обсуждаться элементы, в которых при определении жесткости в плоскости участвует член, характеризующий вращение θ_z . Ясно, что в таких случаях подстановка нулевой строки и столбца в $[k_{rs}]$ — матрицу — не требуется.

50. Преобразование к общей системе координат и объединение элементов

Матрица жесткости, определенная в предыдущем пункте, отнесена к локальной системе координат, так как компоненты сил в плоскости и изгиба первоначально были определены для этой системы. Для получения совокупности элементов и соответствующих уравнений равновесия необходимо преобразовать координаты к системе общих координат (которые теперь будут обозначаться x, y, z , а локальная система — x', y', z'). Кроме того, сначала будет удобнее определить узлы элемента с помощью общих координат и, исходя из них, установить связь с локальными координатами, что, таким образом, потребует обратного преобразования.

Все преобразования производятся с помощью простого процесса. Две системы координат показаны на рис. 63. Силы и смещения узла, данные в локальной системе (x', y', z'), получаются преобразованием из общей системы с помощью матрицы L

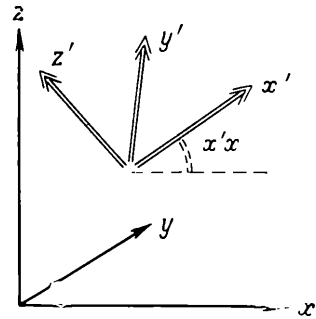


Рис. 63. Локальная и общая системы координат

$$\{\delta'_i\} = [L]\{\delta_i\}; \quad \{F'_i\} = [L]\{F_i\}, \quad (\text{VIII.8})$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (\text{VIII.9})$$

$[\lambda]$ — матрица 3×3 направляющих косинусов углов, образованных двумя системами осей;

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}, \quad (\text{VIII.10})$$

где $\lambda_{xx'}$ — косинус угла между осями x и x' и т. д.

Для всей системы сил, действующих на узлы элемента, мы можем записать

$$\{\delta'\}^e = [T]\{\delta\}^e; \quad \{F'\}^e = [T]\{F\}^e. \quad (\text{VIII.11})$$

По правилам ортогонального преобразования (см. параграф 4) матрица жесткости элемента, выраженная в главных координатах, принимает вид

$$[k] = [T]^T [k'] [T]. \quad (\text{VIII.12})$$

В обоих вышеприведенных уравнениях $[T]$ определяется с помощью

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.13})$$

— диагональной матрицы, составленной из матриц $[L]$, причем число матриц равно числу узлов в элементе. Легко показать, что типичная матрица жесткости примет вид

$$[k_{rs}] = [L]^T [k'_{rs}] [L], \quad (\text{VIII.14})$$

где $[k'_{rs}]$ определяется из уравнения (VIII.6) в локальных координатах.

Определение выражений в локальных координатах производится по простому образцу. Если начало локальной и общей системы координат совпадают, то

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (\text{VIII.15})$$

Так как при вычислении матрицы жесткости положение точки начала координат несущественно, это преобразование всегда будет достаточным для определения локальных координат в данной плоскости (или в плоскости, параллельной элементу).

После определения матриц жесткости всех элементов в общей системе координат производится объединение элементов и окончательное решение по стандартному образцу. Вычисленные результирующие смещения относятся к общей системе, поэтому перед тем, как приступить к вычислению напряжений, необходимо заменить их для каждого элемента локальной системы.

В этом случае можно использовать обычные матрицы жесткости для компонентов изгиба в плоскости. Если все элементы, соединяющиеся в данном узле, находятся в одной плоскости, возникает осложнение. В общих координатах получающиеся шесть уравнений будут сингулярными. Это объясняется тем фактом, что только пять из уравнений будет тогда независимы в связи с тем,

что мы опустили величину вращения, перпендикулярного к плоскости. Для таких узлов объединение необходимо производить в локальной системе координат.

51. Локальные направляющие косинусы

После того как матрица направляющих косинусов будет определена для каждого элемента, задача не представляет трудности, и ее решение следует традиционной форме.

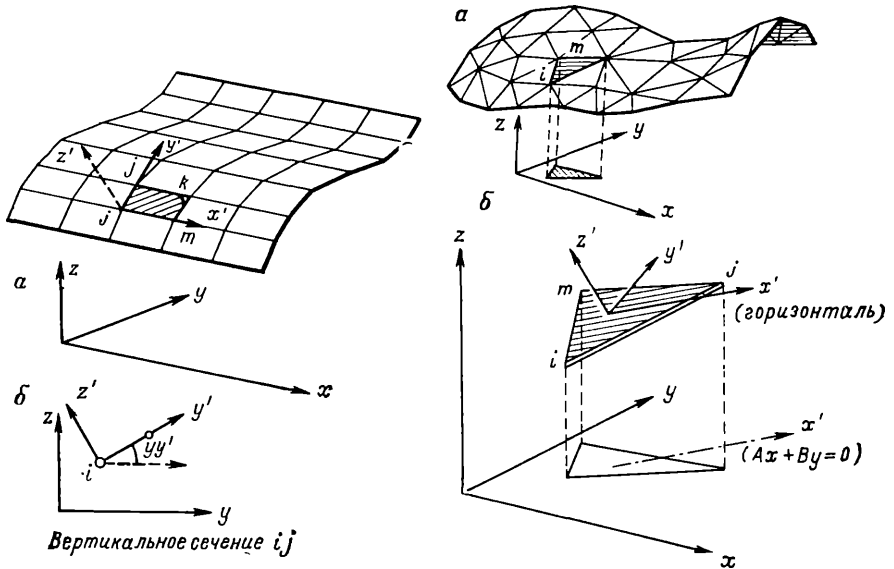


Рис. 64. Цилиндрическая оболочка, представляемая как совокупность прямоугольных элементов. Локальные и общие координаты

Рис. 65. Представление оболочки произвольной формы как совокупности треугольных элементов (а) и локальные и общие координаты для треугольного элемента (б)

Определение матрицы направляющих косинусов связано с некоторыми алгебраическими трудностями и оно не является единственным, так как направление одной из осей произвольно в случае, если она лежит в плоскости элемента.

Сначала мы рассмотрим объединение прямоугольных элементов, где эта задача относительно проста.

51.1. Прямоугольные элементы. Так как использование таких элементов ограничивается поверхностями цилиндрического или коробчатого типа, удобнее рассмотреть одну сторону элементов и соответствующую координату x' , параллельную главной оси x . В типичном элементе $ijkm$, который показан на рис. 64, теперь легко будет вычислить все нужные нам направляющие косинусы.

Направляющие косинусы x' будут

$$\begin{aligned}\lambda_{x'x} &= 1; \\ \lambda_{x'y} &= 0; \\ \lambda_{x'z} &= 0.\end{aligned}\tag{VIII.16}$$

Направляющие косинусы оси y' будут получены при рассмотрении координат различных узловых точек.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lambda_{y'x} &= 0; \\ \lambda_{y'y} &= + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}}; \\ \lambda_{y'z} &= + \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}},\end{aligned}\tag{VIII.17}$$

есть простые геометрические соотношения, которые можно определить, рассмотрев плоскость участка, проходящую вертикально через ij . Таким же образом для этого участка для оси z' получаем

$$\begin{aligned}\lambda_{z'x} &= 0; \\ \lambda_{z'y} &= - \frac{z_j - z_i}{\sqrt{\{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}}; \\ \lambda_{z'z} &= + \frac{y_j - y_i}{\sqrt{\{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}}}.\end{aligned}\tag{VIII.18}$$

Следовательно, важно использовать целесообразную нумерацию точек, чтобы сохранить правильный знак в выражении.

51.2. Треугольные элементы. Произвольная оболочка, разделенная на треугольные элементы, показана на рис. 65.

Рассмотрим теперь типичный элемент ijm , нумерация которого произведена против часовой стрелки при взгляде на нее сверху, или, в более общей форме, с одной стороны поверхности.

Общие координаты трех узловых точек определяют плоскость элемента и, следовательно, направление z' нормали к нему. Теперь необходимо определить направление x' в плоскости элемента. Удобным для вычислений направлением было бы такое, при котором оно всегда находилось в плоскости, параллельной плоскости xy . Таким образом, мы упрощаем последующую интерпретацию результатов; однако вполне очевидно, что могут быть выбраны и другие варианты.

Теперь будем определять направляющие косинусы нормальной оси z' . Из аналитической геометрии хорошо известно, что если уравнение плоскости будет записано как

$$Ax + By + Cz + D = 0,\tag{VIII.19}$$

то направляющие косинусы нормали z' могут быть записаны

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{z'x} &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \lambda_{z'y} &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \lambda_{z'z} &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.20})$$

Уравнение для плоскости, проходящей через выделенные точки i, j, m , может быть записано как

$$\det \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ x_m - x_i & y_m - y_i & z_m - z_i \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{VIII.21})$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= y_{ji}z_{mi} - y_{mi}z_{ji}; \\ B &= -x_{ji}z_{mi} + x_{mi}z_{ji}; \\ C &= x_{ji}y_{mi} - x_{mi}y_{ji}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.22})$$

где $x_{ji} = x_j - x_i$ и т. д.

Если ось x' горизонтальна, то это же уравнение в плоскости, параллельной xy (т. е. $z = \text{const}$), будет просто

$$Ax + By = 0. \quad (\text{VIII.23})$$

Направляющие косинусы могут быть определены непосредственно

$$\begin{aligned} \lambda_{x'x} &= -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \\ \lambda_{x'y} &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.24})$$

при $\lambda_{x'z} = 0$ из условия перпендикулярности. Теперь можно определить третий ряд направляющих косинусов, соответствующих направлению оси y' . Так как эта ось перпендикулярна к осям x' и z' , мы получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{y'x} \lambda_{x'x} + \lambda_{y'y} \lambda_{x'y} + \lambda_{y'z} \lambda_{x'z} &= 0, \\ \lambda_{y'x} \lambda_{z'x} + \lambda_{y'y} \lambda_{z'y} + \lambda_{y'z} \lambda_{z'z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.25})$$

одновременно с

$$\lambda_{y'x}^2 + \lambda_{y'y}^2 + \lambda_{y'z}^2 = 1. \quad (\text{VIII.26})$$

Решив это, получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{y'x} &= \frac{AC}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} \\ \lambda_{y'y} &= -\frac{BC}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} \\ \lambda_{y'z} &= \frac{A + B^2}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.27})$$

Решая эти уравнения со знаками, приведенными выше, получим правильную правостороннюю систему координат¹.

Все направляющие косинусы теперь определены и соответствующие матрицы преобразования могут быть введены в расчеты.

52. Некоторые практические примеры

Первый пример, который мы здесь приводим, — расчет оболочки арочной плотины. Для этой задачи мы выбрали простую геометрическую форму, показанную на рис. 66, так как для нее были

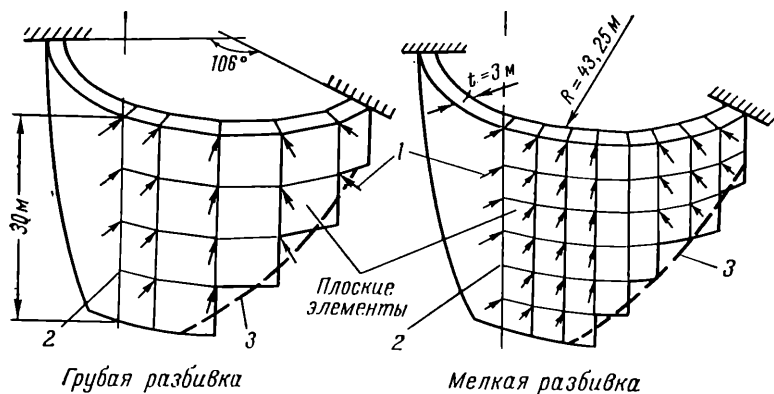


Рис. 66. Арочная плотина, представленная в виде совокупности треугольных элементов:

1 — гидростатическая нагрузка, представленная в виде сосредоточенных нагрузок; 2 — нагрузки в узлах; 3 — линия контакта с основанием

получены результаты модельных экспериментов и имелись другие методы подхода. Использовалось разбиение на прямоугольные элементы, так как простая цилиндрическая форма дает такую воз-

¹ Нужно отметить, что если $A=B=0$, то уравнения (VIII.25) и (VIII.27) станут неопределенными. Так как плоскость элемента будет тогда параллельна xy , можно произвольно выбрать любое направление x' и y' . Поэтому, например, мы просто можем принять, что матрица λ есть единичная матрица.

можность, хотя при этом для закрепленной линии основания приближение было весьма неточным. Производилось разбиение на элементы двух размеров.

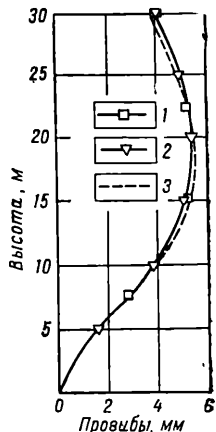


Рис. 67. Арочная плотина. Горизонтальные прогибы по центральной оси

1 — решение с помощью метода конечных элементов (при грубой разбивке); 2 — решение с помощью метода конечных элементов (при мелкой разбивке); 3 — решение по методу пробных нагрузок (коэффициент Пуассона $\nu=0,15$)

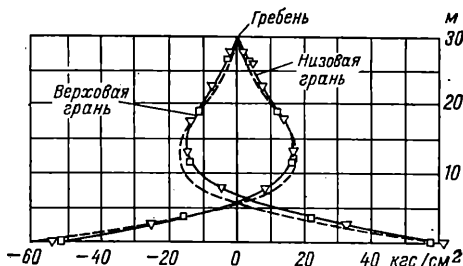


Рис. 68. Арочная плотина. Вертикальные напряжения по центральной оси в ключевом сечении. (Условные обозначения те же, что на рис. 67)

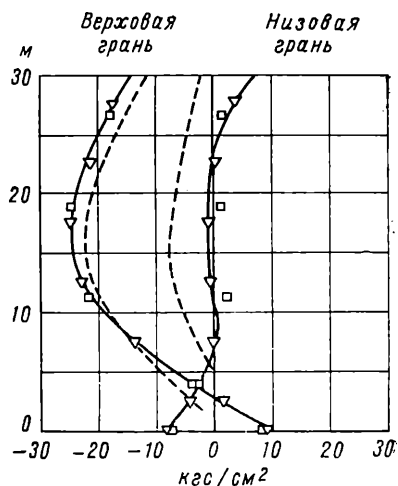


Рис. 69. Арочная плотина. Горизонтальные (арочные) напряжения по центральной оси в ключевом сечении (+ растяжение)

Результаты, приведенные на рис. 67, 68 и 69 для прогибов и напряжений на участке центральной оси, показывают, что при более точном разбиении существенного улучшения не происходит. Это подтверждает то, что сходимость как при физическом приближении к истинной форме с помощью плоских элементов, так и при математическом приближении с помощью метода конечных эле-

ментов является очень хорошей. Для сравнения показаны величины напряжений и прогибов, полученные с помощью другого приближенного метода¹.

53. Сходимость

При формулировании в главе III матрицы напряжения в плоскости непрерывность смещения между соседними элементами была обеспечена.

В главе VII такая же непрерывность достигалась и для изгибных элементов, хотя было показано, что можно иметь хорошие результаты даже при нарушении совместности наклона. Функции смещения, обеспечивающие непрерывность между элементами, лежащими в одной плоскости, могут, в целом, приводить к разрыву, если на границе происходит деформация плоскости.

Метод приближенного решения с помощью конечных элементов, используемый в этой главе, поэтому всегда основывается на несогласованных функциях смещения и их сходимость может быть продемонстрирована лишь «экспериментально». С уменьшением размера элемента при отсутствии разрыва в истинной форме оболочки несогласованность значительно уменьшается и возможные ошибки, получаемые как в результате физического подхода с помощью плоских элементов, так и в результате несогласованности, имеют тенденцию к исчезновению. Иногда для того, чтобы избежать таких ошибок, предлагалось использовать элементы оболочек криволинейной формы. Но это может увеличить трудности при вычислении, поэтому необходимости в таких элементах может не возникнуть, если будет доказано, что хорошее приближение можно получить с помощью других методов.

Размер разбивки, необходимый для получения приемлемой аппроксимации, не представляется определенным. По мере уменьшения толщины оболочек часто оказывается, что изгибающие моменты имеют тенденцию концентрироваться в граничной области и очень резко изменяться. В таких случаях достигается хорошее приближение к мембранным силам или силам в плоскости при использовании даже довольно грубого разбиения, но в граничных областях для воспроизведения изменений момента потребуется чрезвычайно тонкая разбивка.

Для таких случаев приближенные аналитические способы относительно просты и основное использование метода конечных элементов может быть применено к решению задач с оболочками со

¹ Сравнительное вычисление производилось с помощью так называемого метода пробных нагрузок. Описание дается с разрешения Бюро Рекламаций США.

средней толщиной, где возможны нерегулярности, разрывы и т. д., а изгиб представляет ту же важность, что и действие сил в плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Flü gge, Stresses in Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
2. B. E. Greene, D. R. Strome, R. C. Weikel, Application of the stiffness method to the analysis of shell structures, Proc. Aviation Conference, Amer. Soc. Mech. Eng., Los Angeles, March 1961.
3. R. W. Clough and J. L. Tocher, Analysis of thin arch dams by the finite element method, in Proc. of Symposium on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, 1965).
4. J. H. Argyris, Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements, J. Roy. Aer. Soc., 69, pp. 801—5, 1965 (Nov).
5. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, Finite element procedures in the solution of plate and shell problems, in Stress Analysis (chapter 8), ed.: O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, J. Wiley, 1965.
6. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures, Proc. of Symposium on Theory of Arch Dams, Southampton Univ., 1964 (Pergamon Press, 1965).

54. Вступление

Задачи расчета осесимметричных оболочек представляют существенное практическое значение, поэтому мы рассматриваем в этой главе особые методы подхода к их решению. Хотя общий метод, описанный в предыдущей главе, вполне применим и в этом случае, мы увидим, что можно значительно упростить решение, если принять во внимание осевую симметрию сооружения. В частности, если и оболочка и нагрузка будут осесимметричными, можно показать, что элементы становятся «одномерными». Это более простой тип элемента, о котором мы не вели речь в предыдущих главах.

Впервые подход к решению осесимметричных оболочек с помощью метода конечных элементов был дан Grafton и Strome [1]. В этой работе элементы представлены в виде простых усеченных конусов и используется прямой подход к выбору функций смещения. Вывод уточненной формулы жесткости элемента дан в работах Попов et al. [2] и Jones and Strome [3], а развитие ее к случаю несимметричных нагрузок предложено Grafton и Strome [1] и дано у Percy et al. [4], Klein [5] и Jones and Strome [6].

В осесимметричных оболочках, как и во всех других типах оболочек, действуют изгибающие силы, а также силы в плоскости или мембранные. Эти силы определяются единственным образом как функции от обобщенных деформаций, которые включают в себя расширение и изгиб срединной поверхности. Если перемещения каждой точки срединной поверхности определены, то деформации и внутренние результирующие напряжения или просто напряжения могут быть вычислены с помощью формул, которые мы найдем в стандартных справочниках по теории оболочек. Например, в осесимметричной оболочке при осесимметричном нагружении (рис. 70) смещение точки срединной поверхности единственным образом определяется двумя компонентами u и w соответственно в тангенциальном и нормальном направлениях.

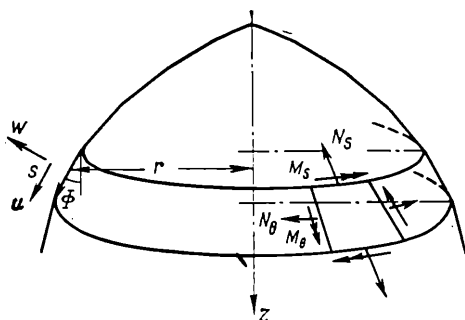


Рис. 70. Осесимметричная оболочка; смещения в результате нагружения и результирующие напряжения. Оболочка представлена в виде совокупности плоских элементов

и внутренние результирующие напряжения или просто напряжения могут быть вычислены с помощью формул, которые мы найдем в стандартных справочниках по теории оболочек. Например, в осесимметричной оболочке при осесимметричном нагружении (рис. 70) смещение точки срединной поверхности единственным образом определяется двумя компонентами u и w соответственно в тангенциальном и нормальном направлениях.

Четыре компонента деформации находим с помощью следующего выражения при условии, что угол Φ не будет изменяться:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/ds \\ (\omega \cos \Phi + u \sin \Phi)/r \\ d^2\omega/ds^2 \\ -\frac{\sin \Phi}{r} \frac{d\omega}{ds} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IX.1})$$

В итоге получим четыре результирующих внутренних напряжения, показанных на рис. 70 и которые связаны с деформациями с помощью матрицы упругости $[D]$,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (\text{IX.2})$$

Для изотропной оболочки матрица $[D]$ принимает вид

$$[D] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix}, \quad (\text{IX.3})$$

где верхняя часть соответствует плоскому напряженному состоянию, а нижняя — матрице изгибных жесткостей, причем в обеих из них сдвиговые члены отбрасываются.

55. Характеристики элемента — осесимметричные нагрузки

Разобьем оболочку с помощью узловых поверхностей на ряд усеченных конусов, как показано на рис. 71. Узловые смещения в точках, таких как i и j , единственно определяют деформации элемента с помощью заданных функций формы. В каждом узле задаются осевые и радиальные перемещения и вращение. Необходимо иметь все три компонента, так как оболочка может нести изгибающие моменты.

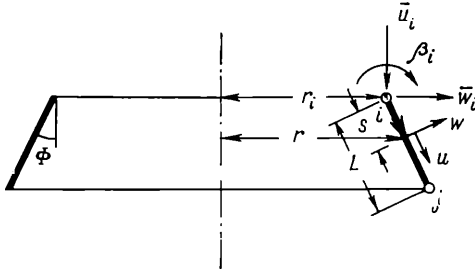
Смещение узла i может, таким образом, определяться по трем компонентам

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\beta}_i \end{Bmatrix}. \quad (\text{IX.4})$$

Элемент с двумя узлами ij содержит, таким образом, шесть степеней свободы, определяемых смещениями элемента,

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \quad (\text{IX.5})$$

Смещения внутри элемента единственно определяются с помощью узловых смещений $\{\delta\}^e$ и положения s



$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e. \quad (\text{IX.6})$$

Если взять u как величину, линейно изменяющуюся от s , а w как кубическое уравнение по s , мы будем иметь шесть неопределенных постоянных, которые можно получить из узловых величин \bar{u} , \bar{w} и β .

Рис. 71. Элемент осесимметричной оболочки

В узле i

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & + \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = [\lambda] \{\delta_i\}. \quad (\text{IX.7})$$

Записав

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 s; \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3, \end{aligned} \quad (\text{IX.8})$$

легко найти шесть конечных условий и прийти к

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s' & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3s'^2 + 2s'^3 & L(s' - 2s'^2 + s'^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s' \\ s'^2 \\ s'^3 \end{Bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3s'^2 - 2s'^3 & (-s'^2 + s'^3)L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_j \\ w_j \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_j \end{Bmatrix},$$

где

$$s' = s/L. \quad (\text{IX.9})$$

Обозначив вышеуказанную матрицу 2×6 как $[N']$, мы можем записать

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N'] \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e = [[N'_i] [\lambda], [N'] [\lambda]] \{\delta\}^e = [N'] \{\delta\}^e. \quad (\text{IX.10})$$

Из уравнения (IX.10) легко получить матрицу напряжения $[B]$, используя определение из уравнения (IX.1). Это дает

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e = [[B_i] [\lambda], [B_j] [\lambda]] \{\delta\}^e, \quad (\text{IX.11})$$

где

$$\begin{aligned} [B_i] &= \left[\begin{array}{c|c} -1/L & 0 \\ (1-s') \sin \Phi/r & (1-3s'^2 + 2s'^3) \cos \Phi/r \\ 0 & (-6 + 12s') L^2 \\ 0 & (6s' - 6s'^2) \sin \Phi/rL \end{array} \right] \times \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ L(s' - 2s'^2 + s'^3) \cos \Phi/r \\ (-4 + 6s')/L \\ (-1 + 4s' - 3s'^2) \sin \Phi/r \end{array} \right] \\ [B_j] &= \left[\begin{array}{c|c} 1/L & 0 \\ s' \sin \Phi/r & (3s'^2 - 2s'^3) \cos \Phi/r \\ 0 & (6 - 12s')/L^2 \\ 0 & (-6s' + 6s'^2) \sin \Phi/rL \end{array} \right] \times \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} 0 \\ L(-s'^2 + s'^3) \cos \Phi/r \\ (-2 + 6s')/L \\ (2s' - 3s'^2) \sin \Phi/r \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{IX.12})$$

Теперь известны все «составные части», необходимые для вычисления матрицы жесткости (или матриц нагрузки, напряжения или начального напряжения) по стандартным формулам главы II.

Требуемое интегрирование проводится по площади A элемента, т. е.

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi r L ds', \quad (\text{IX.13})$$

где s' изменяется от 0 до 1.

Таким образом, с помощью уравнения (II.10) матрица жесткости k принимает вид

$$[k] = \int_0^1 [B]^T [D] [B] 2\pi r L ds'. \quad (\text{IX.14})$$

После подстановки элемент $[k_{rs}]$ этой матрицы принимает вид

$$[k_{rs}] = [\lambda]^T \left(\int_0^1 [B_r]^T [D] [B_s] r ds' \right) [\lambda] 2\pi L. \quad (\text{IX.15})$$

Радиус r должен быть выражен как функция от s до того, как подобное интегрирование будет произведено. Снова целесообразно использовать численное интегрирование. Grafton и Strömte [1] дают явную формулу для матрицы жесткости, основанную на обычном усреднении величины подынтегрального выражения и использовании матрицы $[D]$, соответствующей ортотропному материалу. Даже при этом грубом приближении можно получить хорошие результаты в случае, если используются небольшие элементы.

Percy et al. [4], Klein [5] произвели полное численное 7-точечное интегрирование и несколько улучшили полученную матрицу, хотя она и не представлена в полной форме. Необходимо помнить, что если имеются какие-либо внешние распределенные нагрузки или моменты, при решении должна использоваться их полная величина по окружности, как это делалось с осесимметричными твердыми телами, которые рассмотрены в главе IV.

56. Несимметричные нагрузки

Если нагрузки на осесимметричную оболочку сами не являются симметричными, для описания движения точки срединной поверхности потребуется три компонента смещения. Дополнительным компонентом смещения будет v в направлении, касательном «параллельной» окружности, как показано на рис. 72.

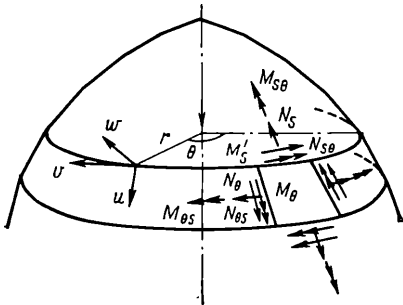


Рис. 72. Осесимметричная оболочка с несимметричной нагрузкой. Смещения и результирующие напряжения

Дополнительные компоненты сдвигового «напряжения» и «деформации» возникают в каждой точке. Компоненты «напряжения» или равнодействующая напряжения, включают теперь силу в плане $N_{s\theta}$ и крутящий момент $M_{s\theta}$, которые тоже показаны на рис. 72.

В качестве деформаций им соответствуют деформация сдвига $\epsilon_{s\theta}$ и кривизна кручения $\chi_{s\theta}$.

Вектор деформации может быть выражен как функция смещений с помощью отношений, выведенных Novozhilov [7]. Аналогично уравнению (IX.1) мы можем записать

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + (\omega \cos \Phi + u \sin \Phi)/r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v \sin \Phi}{r} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta} + \frac{\cos \Phi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \Phi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\ 2 \left(- \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \Phi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \Phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} v \right) \end{Bmatrix}. \quad (\text{IX.16})$$

Соответствующая матрица напряжения будет иметь вид

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IX.17})$$

причем $[D]$ для изотропного материала будет равна

$$[D] = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)t^2/24 \end{vmatrix}. \quad (\text{IX.18})$$

На первый взгляд кажется, что задача является полностью трехмерной и что необходимо деление на элементы по окружности, так как все три компонента смещения изменяются по s и θ . Однако мы теперь можем воспользоваться важным свойством, которое может быть найдено, если мы произведем полное аналитическое формулирование задачи. Это свойство предписывает круговое изменение смещений, если внешние нагрузки изменяются синусоидально вдоль окружности.

Так, например, если нагрузка, параллельная смещению u или w , изменяется как

$$\begin{aligned} U &= U^n(s) \cos n\theta, \\ W &= W^n(s) \cos n\theta, \end{aligned} \quad (\text{IX.19})$$

то и смещения будут изменяться как

$$\left. \begin{aligned} u &= u^n(s) \cos n\theta \\ w &= w^n(s) \cos n\theta \\ v &= v^n(s) \sin n\theta \end{aligned} \right\}. \quad (\text{IX.20})$$

Теперь остается определить только три величины — u^n , w^n и v^n , связанные с одной переменной s и представляющие амплитуды изменения в направлении по окружности.

Снова продолжаем вычисления по стандартному методу конечных элементов. Узловые величины \bar{u}_i^n , \bar{w}_i^n , \bar{v}_i^n представляют собой вектор $\{\delta_i\}$.

Соответствующая функция формы предписывает смещение

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{\delta^e\}, \quad (\text{IX.21})$$

где $[N]$ включает допущения в отношении природы изменения амплитуд $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$. Матрица $[N]$ может быть найдена тем же путем, как было показано в уравнениях (IX.8) — (IX.10). Необходимо, однако, принять форму изменения v^n . Так как здесь не требуется непрерывность наклона, то для v^n может быть задано линейное изменение. По аналогии с уравнением (IX.9) мы можем записать

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-s' & 0 & 0 & 0 & s' & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & L(s'-2s'^2+s'^3) & 0 & 0 & 3s'^2-2s'^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s' & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -s'^2+s'^3 & L \\ 0 & s' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T][\lambda] & 0 \\ 0 & [T][\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\}^e, \quad (\text{IX.22}) \end{aligned}$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \quad (\text{IX.23})$$

и выражает изменение по окружности.

Матрица преобразования направления $[\lambda]$ отличается от матрицы, полученной из уравнения (IX.7), добавочным членом, с помощью которого осуществляется преобразование v самого в себя.

Таким образом,

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{IX.24})$$

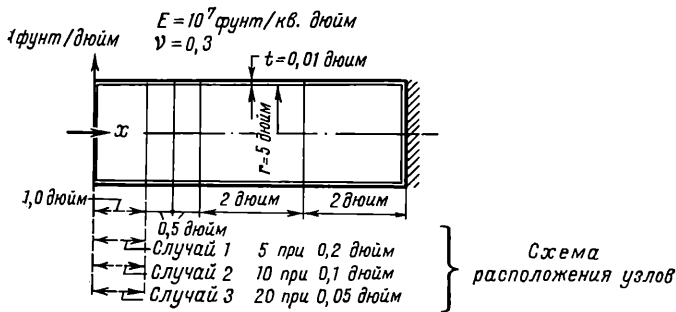
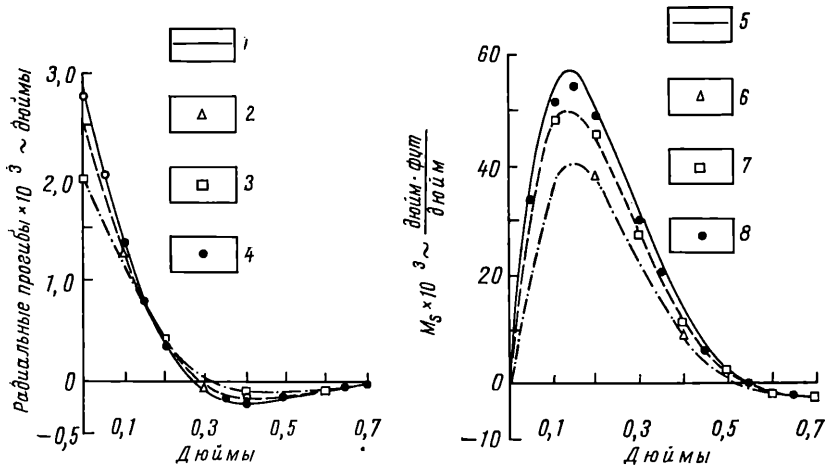


Рис. 73. Расчет цилиндрической оболочки с помощью метода конечных элементов (Grafton and Strome, 1963)

1 — аналитическое решение, % ошибки, максимальный прогиб; 2 — случай 1 (31,7); 3 — случай 1 (11,1); 4 — случай 3 (3,1); 5 — аналитическое решение, % ошибки, максимальный момент; 6 — случай 1 (28,8); 7 — случай 2 (11,0); 8 — случай 3 (2,5)

Теперь вывести матрицы жесткости и т. д. не сложно. С помощью определения деформации в уравнении (IX.16) получим матрицу $[B]$.

Все интегралы берутся по всей площади элемента, т. е. по $dA = rdsd\theta$.

Вектор нагрузки, соответствующий вектору амплитуды $\{\delta\}^e$, определяется

$$\int \begin{bmatrix} [T] & 0 \\ 0 & [T] \end{bmatrix}^T \{F\} r d\theta, \quad (\text{IX.25})$$

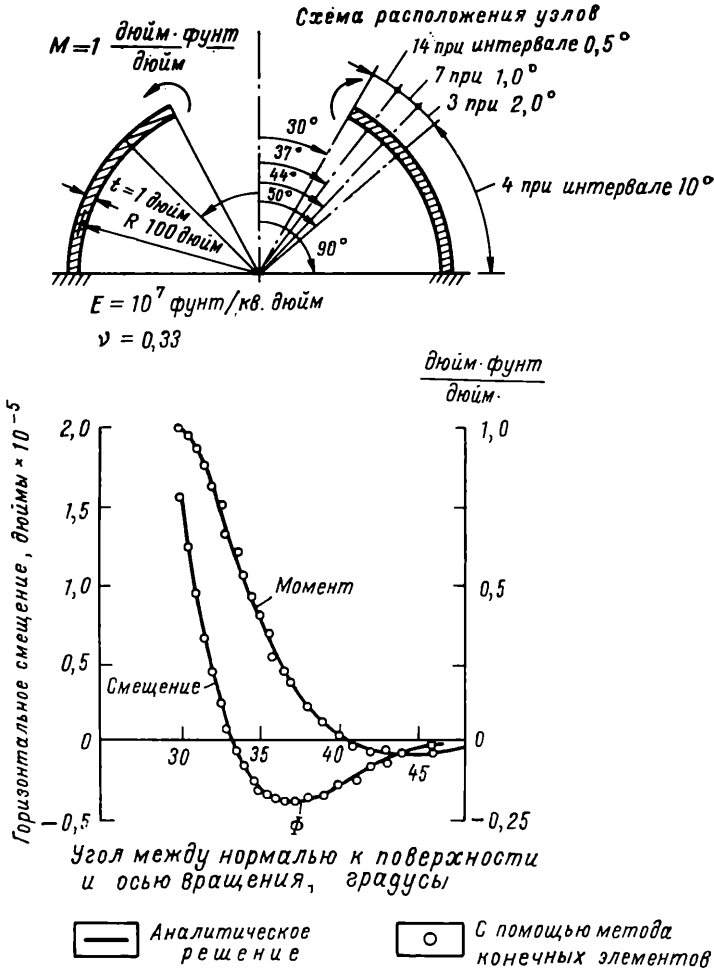


Рис. 74. Расчет оболочки в форме полушара с помощью метода конечных элементов (Grafton and Strome, 1963)

где $\{F\}$ есть вектор внешних нагрузок, действующий на единицу длины окружности. Этот метод дает относительно простое решение для несимметричных нагрузок, которые могут быть выражены с помощью нескольких гармонических членов, подобных уравне-

нию (IX.19). Для очень сложного вида нагружения предпочтительнее использовать метод, описанный в главе VIII.

57. Примеры и точность

При решении задач с осесимметричными оболочками описываемым здесь способом непрерывность обеспечивается на каждом этапе. Поэтому для оболочек полигональной формы всегда будет иметь место сходимост. Задача физического приближения к изогнутой оболочке с помощью полигональной формы аналогична задаче, рассмотренной в главе VIII. Интуитивно мы можем предполагать сходимост, и многочисленные примеры действительно это подтверждают. Когда воздействие нагрузки приводит к значительным мембранным напряжениям, расхождения в величинах изгибающих моментов существуют даже при относительно мелкой разбивке. Однако они исчезают при уменьшении размера разбиения или уменьшаются частично, если используется осреднение моментов. Последнее необходимо при представлении оболочки как ряда усеченных конусов.

На рис. 73 и 74 показан ряд характерных примеров, взятых у Grafton и Strome [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. E. Grafton and D. R. Strome, Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method, J. A.I.A.A., 1, pp. 2342—47, 1963.
2. E. P. Попов, J. Penzien, and Z. A. Lu, Finite element solution for axi-symmetric shells, Proc. A.S.C.E. EM, pp. 119—45, 1964.
3. R. E. Jones and D. R. Strome, Direct Stiffness Method of Analysis of shells of revolution utilising curved elements, J. A.I.A.A., 1966.
4. J. H. Percy, T. H. Pian, S. Klein, and D. R. Navaratna, Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution, J. A.I.A.A., Jan. 1965.
5. S. Klein, A Study of the matrix displacement method as applied to shells of revolution, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
6. R. E. Jones and D. R. Strome, A survey of analysis of shells by the displacement method, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.
7. V. V. Novozhilov, Theory of Thin Shells (Translation), P. Noordhoff, 1959.

**ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ — ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ,
ФИЛЬТРАЦИЯ И Т. П.**

58. Вступление

В главе II мы показали, что основные положения метода конечных элементов в задачах упругости могут быть получены просто с помощью минимизации общей потенциальной энергии системы без подробного рассмотрения условий равновесия. Имеется много задач в инженерном деле и физике, где минимизация некоторой интегральной величины (обычно называемая функционалом) с учетом некоторых граничных условий приводит к точному решению. Этот функционал может представлять из себя в некоторых случаях физическую переменную величину. В этом случае функционал обычно связывают с понятиями энергии или работы. Для многих случаев, однако, он просто является определенной математической величиной.

В этой главе рассматривается решение задач, физическое поведение которых подчиняется общим квазигармоническим дифференциальным уравнениям. Показано, что такие задачи могут решаться так же, как и задачи, в которых определенный квадратичный «функционал» должен минимизироваться по всей области. Когда такой «функционал» составлен, задача решается с помощью метода конечных элементов, применяя все понятия (и вычислительные программы) строительной механики.

Общее квазигармоническое уравнение включает как частный случай хорошо известные уравнения Лапласа и Пуассона. Диапазон физических задач, решаемых с помощью этих уравнений, очень велик. Перечислим лишь некоторые из них, встречаемые в инженерной практике: теплопроводность, фильтрация в пористой среде, невихревое течение идеальных жидкостей, распределение электрического (или магнитного) потенциала, кручение призматических стержней, изгиб призматических балок и т. д.

Формулировки, даваемые в этой главе, обычно применимы одинаково ко всем задачам, поэтому мы не будем делать ссылок на реальные физические величины. Изотропные и неанізотропные области могут рассматриваться с одинаковой легкостью. Двумерные задачи рассматриваются в первой части этой главы. Затем следует переход к трехмерным задачам.

Мы увидим, что те же функции формы, которые использовались ранее в двух- и трехмерном решении упругих задач, будут встречаться и здесь. Основное отличие заключается в том, что теперь лишь одна неизвестная, скалярная, величина (искомая функция) связана с каждой точкой в пространстве. Ранее мы искали несколько неизвестных величин, представленных вектором смещения.

59. Задачи на экстремум

Общее квазигармоническое уравнение, описывающее поведение некоторой неизвестной физической величины Φ , может быть записано

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \Omega = 0, \quad (\text{X.1})$$

где Φ есть неизвестная функция, определяемая внутри области, а k_x , k_y , k_z и Ω есть известные функции x , y и z . Читатель, знакомый, например, с установившейся теплопроводностью, сразу определит функции k_x , k_y и k_z как коэффициенты анизотропной теплопроводности, функцию Ω как источник тепла, а неизвестную функцию Φ как температуру (в случае, если координаты совпадают с основными осями материала). В электрической интерпретации соответствующие величины будут связаны с величинами проводимости, источника зарядов и потенциала. Независимо от физического выражения математическая задача остается одной и той же. Физические условия частной задачи и исследуемой области требуют определенных граничных условий. Два наиболее часто встречаемых случая удовлетворяют следующим условиям:

а) величина Φ определена на границе

или

б)

$$k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} l_z + q + \alpha \Phi = 0 \quad (\text{X.3})$$

на границе, где l_x , l_y и l_z — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности. Если k_x , k_y и k_z равны друг другу, q и α равны нулю, то это условие сводится к хорошо известному условию для непроводящих границ

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

В задаче с проводимостью q есть поток (тепловой) на единицу площади, а $\alpha \Phi$ есть конвекционные потери.

Уравнение (X.1) и граничные условия единственным образом определяют задачу. Однако возможна другая формулировка с помощью вариационного исчисления. На основании хорошо известной теоремы Эйлера [1] можно заключить, что, если интеграл

$$I(u) = \iiint f \left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz$$

минимизируется, то при этом в качестве необходимого условия неизвестная функция $u(x, y, z)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial u / \partial x)} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial u / \partial y)} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial u / \partial z)} \right\} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

в той же самой области и при условии, что u удовлетворяет тем же граничным условиям в обоих случаях.

Читатель может убедиться, что для получения выражения, эквивалентного уравнению (X.1), требуется, чтобы объемный интеграл, данный ниже, взятый по всей области, был бы минимизирован

$$\chi = \iiint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - \Omega \Phi \right] dx dy dz, \quad (\text{X.4})$$

при условии, что Φ отвечает тем же граничным условиям.

60. Формулировка плоской задачи. Треугольные элементы [2]

60.1. Постановка задачи. Физические задачи, которые зависят от двух переменных, встречаются довольно часто. Определяющее дифференциальное уравнение (X.1) может быть записано

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \Omega = 0. \quad (\text{X.5})$$

Эквивалентный функционал, который мы должны минимизировать, принимает вид

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - \Omega \Phi \right] dx dy. \quad (\text{X.6})$$

Теперь рассмотрим область, показанную на рис. 75, которая разделена на треугольные элементы. Пусть узловые величины Φ определяют функцию в каждом элементе, как мы это делали в главе III со смещениями. Для типичного треугольника ijm по аналогии с уравнением (III.5) имеем

$$\Phi = [N_i, N_j, N_m] \{\Phi\}^e, \quad (\text{X.7})$$

в котором, как и в уравнении (III.8),

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta, \quad (\text{X.8})$$

где a_i , b_i и c_i определяются с помощью уравнения (III.6). В вышеприведенном уравнении $\{\Phi\}^e$ есть три величины Φ , связанные с узлами элемента, т. е.

$$\{\Phi\}^e = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{Bmatrix}. \quad (\text{X.9})$$

Так как узловые величины Φ однозначно определяют функцию во всей области, функционал χ может быть минимизирован по отношению к этим величинам.

Это лучше всего сделать, если сначала оценить вклад типичного элемента в каждую производную, например $\partial\chi/\partial\Phi_i$, а затем сложить все полученные величины и приравнять их нулю.

Такой вклад в $\partial\chi/\partial\Phi_i$ будут давать только элементы, прилежащие к узлу i , так как только такие элементы в плоских упругих задачах оказывают влияние на уравнение равновесия узла. Формулирование или составление конечного уравнения в обеих задачах будет одинаковым.

60.2. Характеристики элемента. Теперь следует оценить вклад элемента в производную $\partial\chi/\partial\Phi_i$.

Если величину χ , связанную с элементом, обозначить χ^e (ограничивая интегрирование площадью элемента), то, дифференцируя уравнение (X. 6), мы можем записать

$$\frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi_i} = \iint \left\{ k_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial\Phi_i} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial\Phi_i} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) - \Omega \frac{\partial\Phi}{\partial\Phi_i} \right\} dx dy. \quad (\text{X.10})$$

Определив Φ с помощью уравнений (X.7) и (X.8), можно записать данные уравнения как

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi_i} = & \frac{1}{(2\Delta)^2} \iint (k_x [b_i, b_j, b_m] \{\Phi\}^e b_i + k_y [c_i, c_j, c_m] \{\Phi\}^e c_i) dx dy - \\ & - \frac{1}{2\Delta} \iint \Omega (a_i + b_i x + c_i y) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{X.11})$$

Каждый элемент дает вклад только в три производные, связанные с его узлами. Определив эти три вклада как

$$\left\{ \frac{\partial\chi}{\partial\Phi} \right\}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi_i} \\ \frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi_j} \\ \frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi_m} \end{Bmatrix}, \quad (\text{X.12})$$

мы можем записать результаты уравнения (X.11) и двух других подобных в виде

$$\left\{ \frac{\partial\chi^e}{\partial\Phi} \right\} = [h] \{\Phi\}^e + \{F\}^e. \quad (\text{X.13})$$

Форма записи (X.13) идентичная форме уравнения (X.3). Теперь легко записать матрицу $[h]$. Если принять k_x и k_y за постоянные величины внутри элемента, то интегрирование произвести легко.

Снова отметив, что площадь элемента

$$\iint dx dy = \Delta,$$

мы можем легко прийти к следующей форме:

$$[h] = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{x_y}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m \end{bmatrix} \quad (\text{X.14})$$

или

$$h_{rs} = (k_x b_r b_s + k_y c_r c_s) / 4\Delta,$$

что, как и в задачах конструкций, является симметричным. Вспомним, что с помощью уравнения (III.5) мы можем записать

$$b_i = y_j - y_m = y_{jm}, \quad c_i = x_m - x_y = x_{mj} \text{ и т. д.}$$

Таким же образом можно определить вектор $\{F\}^e$. Если допустить, что Ω есть величина, постоянная внутри элемента, то интеграл

$$F_i = -\Omega \iint (a_i + b_i x + c_i y) dx dy / 2\Delta \quad (\text{X.15})$$

легко вычисляется по всей площади треугольника. Он принимает значение

$$-\Omega (a_i + b_i \bar{x} + c_i \bar{y}) / 2,$$

где \bar{x} и \bar{y} есть координаты центра тяжести, т. е.

$$\bar{x} = (x_i + x_j + x_m) / 3;$$

$$\bar{y} = (y_i + y_j + y_m) / 3.$$

Подставляя, мы видим, что интеграл становится равным

$$\frac{1}{3} \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \Delta.$$

Таким образом, получаем окончательный результат

$$\{F\}^e = -\frac{\Omega \Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{X.16})$$

60.3. Объединение. Окончательные уравнения процесса минимизации требуют объединения всех производных χ и приравнивания их нулю. В типичном случае

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_i} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial \Phi_i} = 0. \quad (\text{X.17})$$

Суммирование производится по всем элементам.

С помощью уравнения (X.13) последнее можно записать

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_i} = \sum \sum h_{im} \Phi_m + \Sigma F_i, \quad (\text{X.18})$$

где суммирование производится по всем элементам и узлам. Этот процесс в точности подобен суммированию структурных уравнений (см. уравнение (I.11)), если $[k]^e$ рассматривается как матрица жесткости элемента, а $\{F\}^e$ есть вклад внутренней распределенной нагрузки. Внешняя нагрузка узлов, соответствующая $\{R\}$ в уравнении (I.11), теперь будет равна нулю. Мы видим полное сходство формулировки характеристик элемента и суммирования со стандартными структурными задачами. Используются те же машинные программы и стандартные приемы.

60.4. Граничные условия. Для определения граничных условий типа (а), которые даны в уравнении (X.2), т. е. когда величина Φ определяется на границах, нет никаких трудностей. Узловые величины предписываются на границах, после чего эта задача будет идентична эквивалентной части структурной задачи, в которой смещения заданы на границах.

Случай определения граничных условий типа (б) является более сложным. Хотя можно попытаться удовлетворить граничным условиям с помощью прямых ограничений функции в граничных элементах, такой подход неудобен и включает в себе опасность того, что структурная аналогия будет нарушена. Поэтому более целесообразно преобразовать вариационный подход таким образом, чтобы величины на границах могли принимать любые значения без ограничений. Это легко сделать, если прибавить соответствующие дополнительные члены к функционалу, который мы должны минимизировать. В плоской задаче граничные условия (б) могут быть записаны

$$k_y \frac{\partial \Phi}{\partial x} l_x + k_x \frac{\partial \Phi}{\partial y} l_y + q + \Phi = 0. \quad (\text{X.3}, a)$$

С помощью вариационных методов, описанных полностью у Berg [1], легко показать, что, если граничный участок C удовлетворяет таким условиям, то «функционал», даваемый уравнением (X.6), должен быть преобразован [3] к виду

$$\begin{aligned} \chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - \Omega \Phi \right] dx dy + \\ + \int_C q \Phi ds + \int_C \frac{1}{2} \alpha \Phi^2 ds, \end{aligned} \quad (\text{X.6}, a)$$

где два последних интеграла берутся по границе, удовлетворяющей условиям (б), вдоль которой Φ не ограничивается. Теперь осталось только прибавить дифференциалы последних двух членов (по отношению к узловым величинам Φ) к уравнению (X.18). Такие дифференциалы существуют только для элементов, которые образуют границу, например элементы r , s , k , показанные на рис. 75. Мы сейчас покажем, что они сводятся к до-

полнительным «силам», которые следует добавить к членам уравнения (X.13).

Рассмотрим, например, поверхность элемента $r-s$. Если q и α принимаются постоянными вдоль поверхности и так как Φ линейно изменяется от Φ_r до Φ_s , то

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_r} \left\{ \int q \Phi ds + \int \frac{1}{2} \alpha \Phi^2 ds \right\}^e = \frac{qL}{2} + \frac{\alpha L}{3} \left(\Phi_r - \frac{1}{2} \Phi_s \right). \quad (\text{X.19})$$

Таким образом, если мы рассматриваем $\partial \chi / \partial \Phi_r$ или «равновесие» узла r , необходимо прибавить подобные члены (или «силы») от двух соседних элементов.

Первая часть выражения, т. е. $qL/2$, дается просто как функция мембранной аналогии, в которой все члены ведущих уравнений имеют структурную значимость. В них Φ представляет боковое смещение мембраны с напряжениями k_x и k_y в направлениях x и y соответственно. Величина q обозначает распределенную внешнюю нагрузку на единицу длины границы. Поэтому, если при определении граничных условий присутствует только член q , это представляет такое структурное состояние границы, когда внешние нагрузки предписаны.

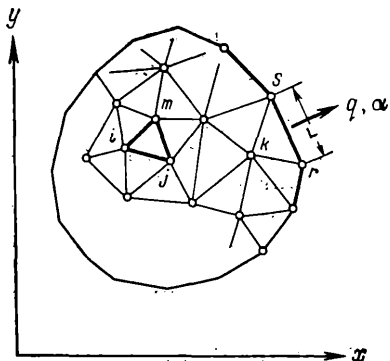


Рис. 75. Разбиение двухмерной области на треугольные элементы

Таким же образом нам легко определить член

$$\frac{\alpha L}{3} \left(\Phi_r - \frac{1}{2} \Phi_s \right)$$

как внешний элемент предписанной жесткости, прибавленный к первоначальной системе. Отсюда мы видим, что при определении граничных условий типа (б) особых трудностей не возникает. При решении этих же задач методом конечных разностей возникают значительные трудности. Естественно, условие $\alpha=0$ и $q=0$ представляет частный случай ненагруженной границы. К этой часто встречаемой категории относятся симметричные линии, а также линии на непроницаемых поверхностях.

60.5. Сходимость. Величины Φ определяются таким образом, чтобы между элементами не возникало разрыва непрерывности. Наклоны $\partial \Phi / \partial x$ и $\partial \Phi / \partial y$ на границе между элементами являются поэтому конечными, и они не дают никакого вклада в функционал, который минимизирован (см. приложение к главе II).

При уменьшении размеров разбиения любой вид изменения Φ может быть представлен. Поэтому очевидно, что достижимый

62. Формулировка объемной задачи

Минимизация функционала, представленная уравнением (X.4) в трехмерной задаче, будет производиться тем же способом, который представлен в параграфе 60 для плоских задач.

Тетраэдральный элемент, используемый в решении трехмерных задач упругости, даст и в этом случае простую формулу (как в главе VI, см. рис. 35).

Следуя тому же методу рассуждения, как и при выводе уравнения (VI.7), можно записать для элемента $ijmp$

$$\Phi = [N_i, N_j, N_m, N_p] \{\Phi\}^e, \quad (\text{X.24})$$

где

$$\{\Phi\}^e = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \\ \Phi_p \end{Bmatrix},$$

$$a \quad N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V \quad (\text{X.25})$$

Постоянные в этом уравнении идентичны постоянным в уравнении (VI.5). Теперь вместо уравнения (X.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}^e}{\partial \Phi_i} = & \frac{1}{(6V)^2} \iiint (k_x [b_i, b_j, b_m, b_p] \{\Phi\}^e b_i + \\ & + k_y [c_i, c_j, c_m, c_p] \{\Phi\}^e c_i + k_z [d_i, d_j, d_m, d_p] \{\Phi\}^e d_i) dx dy dz - \\ & - \frac{1}{6V} \iiint \Omega (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (\text{X.26})$$

Допуская, что величины k_x , k_y , k_z и Ω постоянны внутри элемента, мы получим матрицу $[h]$ в форме

$$\begin{aligned} [h] = & \frac{k_x}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i & b_p b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j & b_p b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m & b_p b_m \\ b_i b_p & b_j b_p & b_m b_p & b_p b_p \end{bmatrix} + \\ & + \frac{k_y}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i & c_p c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j & c_p c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m & c_p c_m \\ c_i c_p & c_j c_p & c_m c_p & c_p c_p \end{bmatrix} + \\ & + \frac{k_z}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_j d_i & d_m d_i & d_p d_i \\ d_i d_j & d_j d_j & d_m d_j & d_p d_j \\ d_i d_m & d_j d_m & d_m d_m & d_p d_m \\ d_i d_p & d_j d_p & d_m d_p & d_p d_p \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{X.27})$$

Вектор $\{F\}^{e1}$ теперь примет вид

$$\{F\}^e = -\frac{\Omega V}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.28})$$

Легло получить матрицу наклона, которая будет иметь форму, аналогичную уравнению (X.10). Составные элементы с восемью узлами могут быть объединены и их использование рекомендуется, потому что может быть получено при этом простое разбиение.

Можно опять использовать более точные функции формы (аналогичные тем функциям, которые описаны в параграфах 32 и 33), хотя, вероятно, это усложнение не даст нам особых преимуществ.

63. Примеры. Оценка точности

Легко показать, что, производя объединение полученных жесткостей треугольных элементов для регулярной сетки, показанной на рис. 77, а, мы получим уравнения, идентичные тем уравнениям, которые выведены с помощью хорошо известных методов конечных разностей [4].

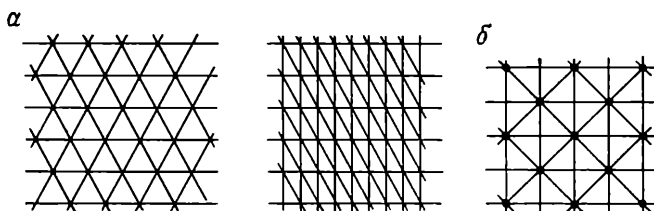


Рис. 77. Схемы «регулярной» и «нерегулярной» сетки

Очевидно, что и решения, полученные этими двумя методами, будут идентичны, как и порядки приближения².

Если мы используем «нерегулярную» сетку с расположением узлов в вершинах квадратов, различие между двумя методами будет очевидно (рис. 77, б). Различие происходит за счет нагрузочного вектора $\{F\}^e$.

При объединении в уравнениях появляются величины «нагрузки», которые незначительно отличаются в разных узлах, но

¹ Для доказательства этого укажем:

$$\iiint (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) dx dy dz / 6V = \frac{1}{4} V.$$

² В случае, если граничные величины будут заданы.

сумма которых будет той же, что и сумма, полученная методом конечных разностей. Поэтому решения имеют только местное отличие, а средние величины будут одинаковы.

На рис. 78 показано сравнение результатов, полученных при использовании нерегулярной сетки, с результатами приближенного решения методом конечных разностей низшего порядка. Результаты, как и ожидалось, имеют одинаковую степень точности.

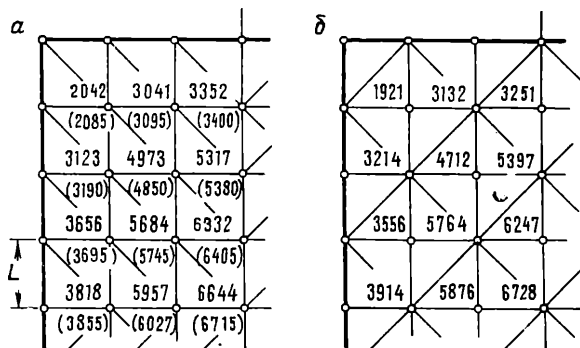


Рис. 78. Кручение призматического стержня
Цифры в скобках соответствуют более точному решению Southwell, использовавшему сетку 12×16 (величины $\Phi/g\theta\alpha^2$ представлены)

На данном этапе читатель, вероятно, будет удивлен тем, что появилась необходимость альтернативного подхода, который повторяет результаты испытанного и хорошо известного метода. Причина в том, что новый метод имеет следующие достоинства: простота подхода к анизотропным и неоднородным задачам (в частности, в случае, когда направление анизотропии переменено);

форма и размеры элементов могут быть выбраны в соответствии с произвольными границами с учетом областей резкого изменения искомой функции;

для сборки элементов и для решения можно использовать стандартные (структурные) программы.

Для иллюстрации возможной на практике точности решения приведем два более сложных примера. Первый — это задача чистого кручения неоднородного стержня, показанная на рис. 79.

Основное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + 2\theta = 0, \quad (\text{X.29})$$

где Φ есть функция напряжения, G — модуль сдвига, а θ — угол закручивания на единицу длины стержня.

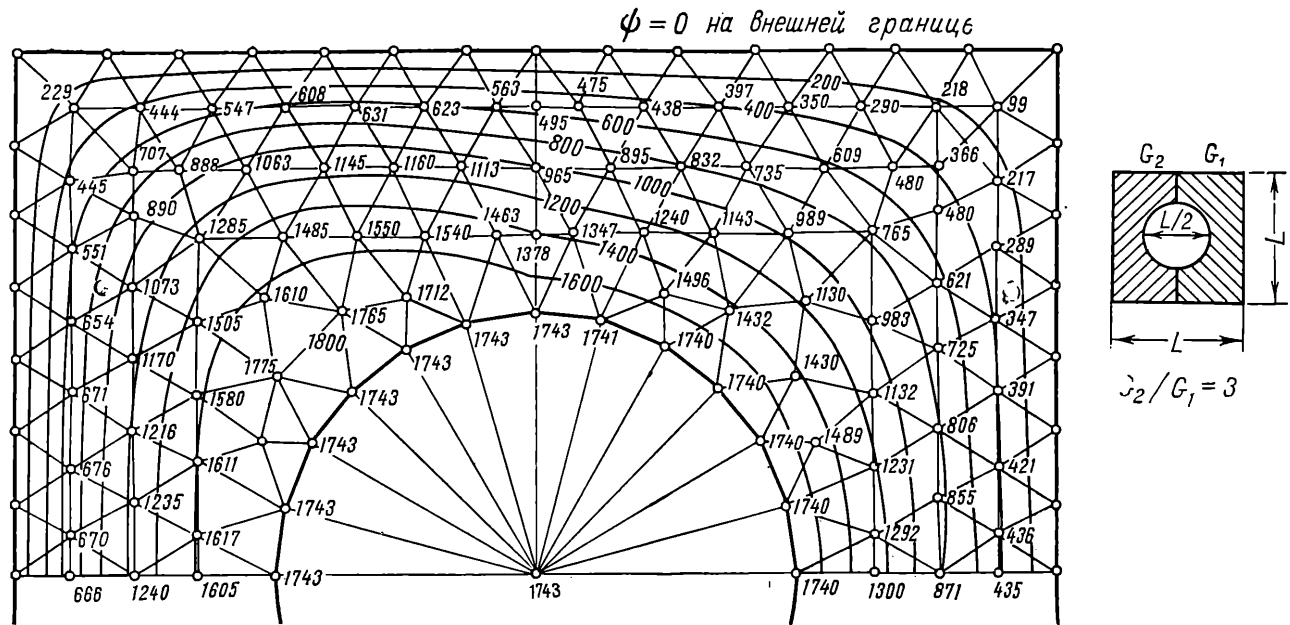


Рис. 79. Кручение пустотелого биметаллического стержня. Величины $\Phi/g\theta\alpha^2 \times 10^4$ получены из решения методом конечных элементов

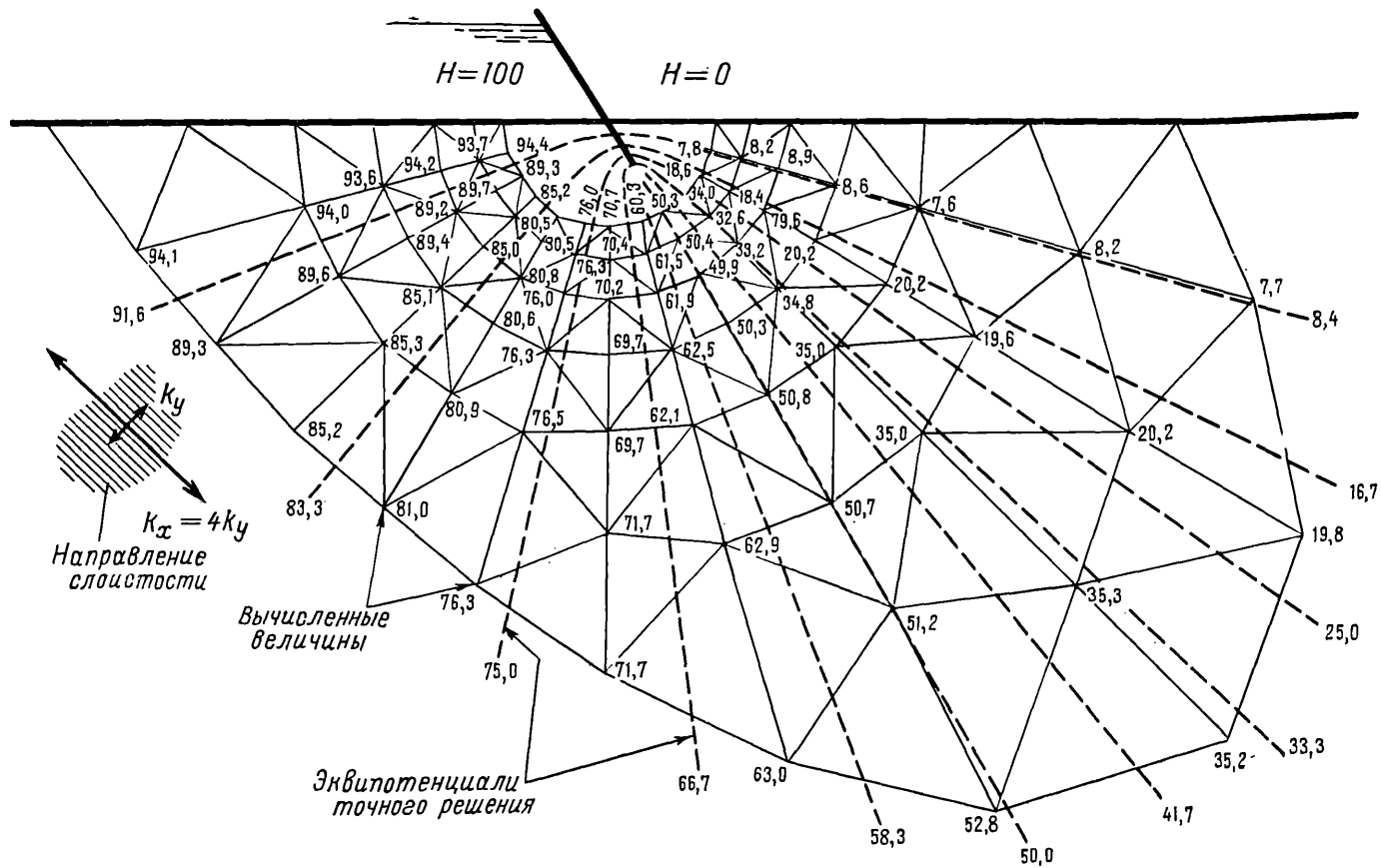


Рис. 80. Фильтрация под наклонной шпунтовой стенкой на слоистом основании. Точное разбиение в основании стенки не показано. Сравнение с точным решением производится путем нанесения линий тока для обоих методов

Для решения методом конечных элементов принимается, что голая часть стержня составлена из материала с величиной G (порядка 10^{-3}), меньшей по сравнению с другими материалами¹

Результаты показывают хорошую сходимость с данными решения методом конечных разностей [5].

Другой пример — течение через анизотропное пористое основание — показан на рис. 80.

В этом случае основное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad (\text{X.30})$$

где k_x и k_y — коэффициенты проницаемости в направлении (наклонных) главных координат. Результаты сравниваются с линиями, полученными при точном решении. В этом примере очевидны возможности использования разбиения на градуированные стороны.

64. Некоторые практические задачи

64.1. Анизотропная фильтрация. В первой задаче рассматривается течение жидкости через весьма неоднородную анизотропную среду с криволинейными границами. Основным определяющим уравнением является, по-прежнему уравнение (X.30). Необходимо ввести в вычислительную программу обеспечение изменения основных направлений x' и y' от элемента к элементу. При вычислениях не встречается затруднений; задача и ее решение даны на рис. 81 [6].

64.2. Осесимметричный тепловой поток. Уравнение осесимметричного теплового потока в стандартной форме может быть записано

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rk \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (\text{X.31})$$

если не будет происходить притока тепла. В этом уравнении T — температура, а k — проводимость. Координаты x и y здесь заменяются на r и z — радиальное и осевое расстояние.

Функции k_x и k_y уравнения (X.5) изменяются пропорционально радиусу. Теперь возможно применить процедуру, описанную в параграфе 60, и произвести для этого изменение в интегрировании; допущение постоянной средней величины (rk) в каждом элементе не даст большой ошибки. Важно, что снова можно воспользоваться стандартной вычислительной программой. На рис. 82 показано распределение температуры в напорном баллоне ядерного реактора [2] для случая стационарного состояния,

¹ Это сделано для того, чтобы избежать трудностей, возникающих при сложном ссединении области, и для возможности использования стандартных программ.

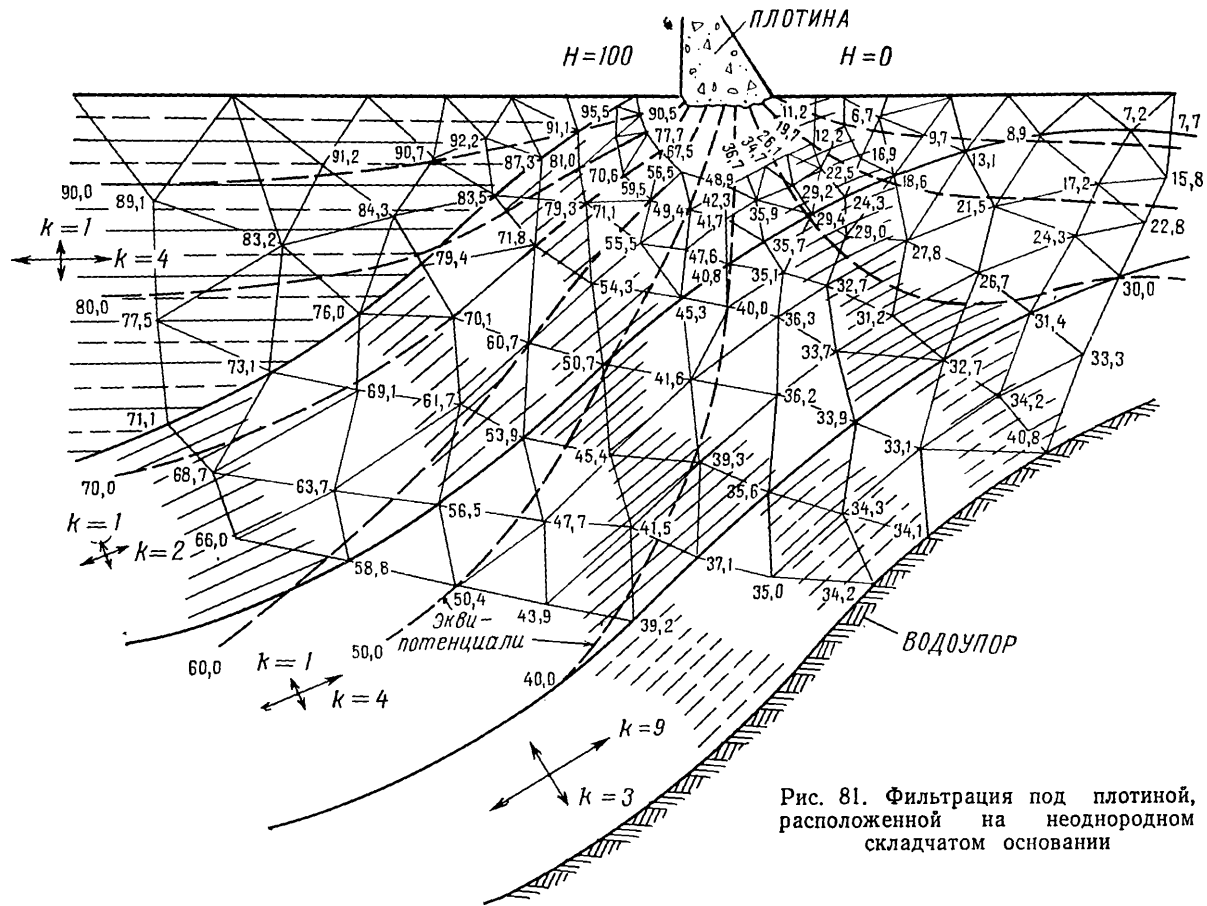


Рис. 81. Фильтрация под плотинной, расположенной на неоднородном складчатом основании

когда обеспечивается постоянная равномерная температура на внутреннем контуре.

64.3. Гидродинамическое давление на поверхность движущегося тела. Если погруженное тело движется в жидкости с заданным ускорением и малой амплитудой движения, то можно показать

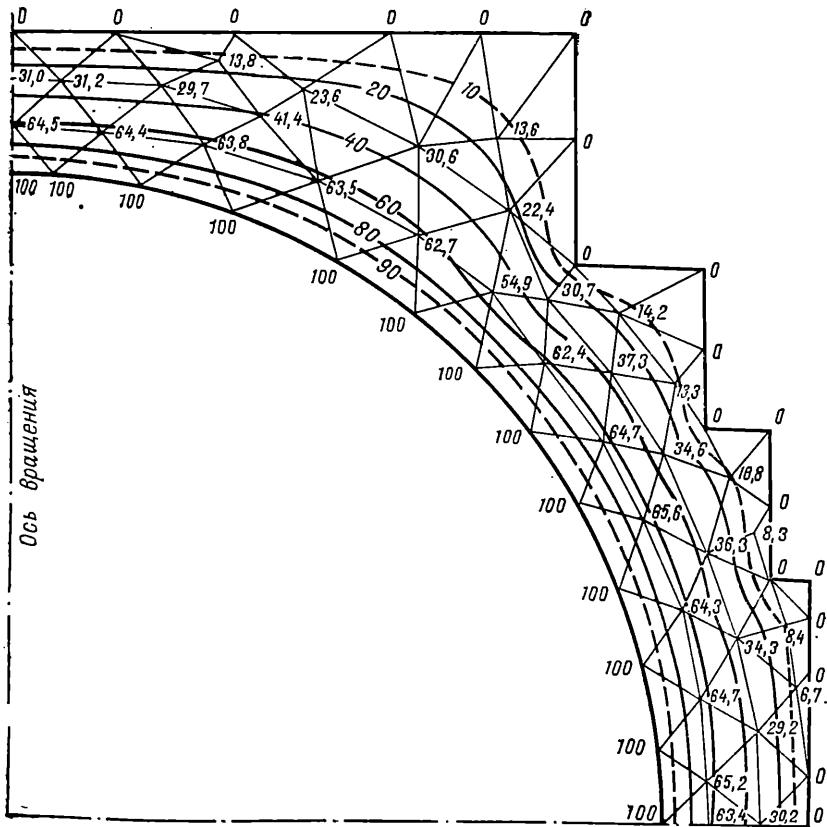


Рис. 82. Распределение температуры в осесимметричной камере высокого давления реактора при стационарном тепловом потоке

[7], что развиваемые избыточные давления на граничную поверхность определяются по уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0.$$

На подвижных (или стационарных) границах условия будут соответствовать типу (б) (см. уравнение (X.3)) и определяются по уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n, \quad (X.32)$$

где ρ есть плотность жидкости, а a_n — нормальный компонент ускорения границы. На свободной поверхности граничные условия имеют вид

$$p = 0. \quad (X.33)$$

Очевидно, эти задачи подходят под категорию задач, обсуждаемых в этой главе. В качестве примера рассмотрим случай вертикальной стенки водоема, показанный на рис. 83, и попробуем

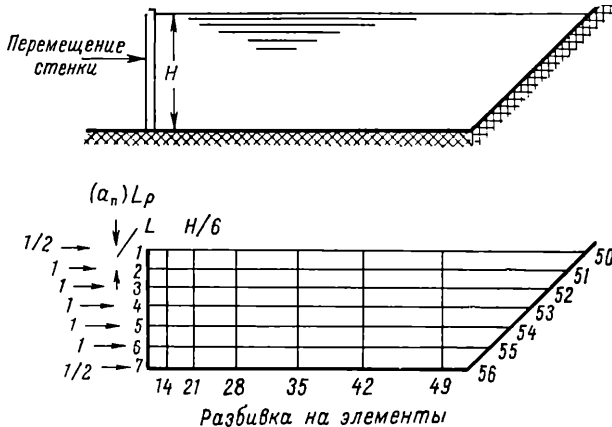


Рис. 83. Горизонтальное перемещение стенки в водохранилище

найти распределение давления в точках вдоль поверхности стенки и на дне резервуара для любого заданного движения граничных точек 1—7

Показано разделение области на элементы (всего 42). Здесь используются элементы четырехугольной формы, полученные в результате «двойного осреднения» (см. пункт 61.1).

Для того чтобы результаты были применимы для любой системы ускорения, решается семь отдельных задач. В каждой, в свою очередь, участок границы, соседний с рассматриваемой точкой, получает единичное ускорение, что эквивалентно нагрузкам

$$\rho \frac{L}{2}, \rho L \quad \rho L, \rho \frac{L}{2},$$

прилагаемым по очереди к точкам 1—7.

Для любого произвольного распределения ускорения давления, развиваемые в точках 1—56, могут быть представлены в виде матрицы, зависящей от ускорения в точках 1—7. Последнее можно записать

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_7 \\ p_{14} \\ p_{21} \\ p_{28} \\ p_{35} \\ p_{42} \\ p_{49} \\ p_{56} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_7 \end{pmatrix}, \quad (\text{X.34})$$

где матрица M дана в табл. 7.

Т а б л и ц а 7

1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,7249	0,3685	0,2466	0,1963	0,1743	0,0840
3	0	0,3685	0,9715	0,5648	0,4210	0,3644	0,1744
4	0	0,2466	0,5648	1,1459	0,7329	0,5954	0,2804
5	0	0,1963	0,4210	0,7329	1,3203	0,9292	0,4210
6	0	0,1744	0,3644	0,5954	0,9292	1,5669	0,6489
7	0	0,1680	0,3488	0,5607	0,8420	1,2977	1,1459
$[M] = \rho \frac{H}{6}$							
14	0	0,1617	0,3332	0,5260	0,7548	1,0285	0,6429
21	0	0,1365	0,2754	0,4171	0,5573	0,6793	0,3710
28	0	0,0879	0,1731	0,2519	0,3187	0,3657	0,1918
35	0	0,0431	0,0838	0,1195	0,1478	0,1661	0,0863
42	0	0,0186	0,0359	0,0150	0,0625	0,0699	0,0362
49	0	0,0078	0,0150	0,0213	0,0261	0,0291	0,0151
56	0	0,0069	0,0134	0,0190	0,0232	0,0259	0,0134

($L=H/6$)

Например, если ускорение a будет однородным, давления можно вычислить, взяв

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_7 \end{pmatrix} = \bar{a} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.35})$$

Результирующее распределение давления на стенку и дно водоема показано на рис. 84. Результаты давления на стенку согла-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. N. Berg, Calculus of Variation, in Handbook of Engineering Mechanics, chapter 16, ed. W. Flügge, McGraw-Hill, 1962.
2. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, Finite elements in the solution of field problems, *The Engineer*, pp. 507—10, 24 Sept. 1965.
3. W. Visser, A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations, Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Techn., Ohio, Oct. 1965.
4. D. N. de G. Allen, Relaxation Methods, McGraw-Hill, 1955, p. 199.
5. J. F. Ely and O. C. Zienkiewicz, Torsion of Compound bars relaxation solution, *Int. J. Mech. Sci.*, 1, pp. 356—65, 1960.
6. O. C. Zienkiewicz, P. Mayer, and Y. K. Cheung, Solution of Anisotropic seepage problems by finite elements, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 92, EMI, pp. 111—20, 1960.
7. C. L. Zienkiewicz and B. Nath, Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams— an electric analogue solution, *Proc. Inst. Civ. Eng.*, pp. 165—176, 1963.
8. S. H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956, (chapter 6).
9. E. L. Wilson and R. W. Clough, Dynamic response by a step by step analysis, Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon, Oct. 1962.

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЛЕБАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ

66. Вступление

В предыдущих главах рассматривались только статические задачи сооружений. Одна из целей настоящей главы — показать, что введение инерционных членов не представляет ничего принципиально нового и не усложняет решения.

Если мы вычислим матрицы массы элементов, после этого задача принимает стандартную форму, связанную с движением системы с конечным числом степеней свободы. Однако для полноты мы включили в эту главу несколько параграфов, в которых суммируются основные принципы решения задач о свободных колебаниях и переходных процессах.

Заслуженное внимание, естественно, уделяется задачам собственных значений для свободных колебаний. В эту главу включены также задачи устойчивости изгиба плит, в которых необходимо определение собственных значений. Отдельно рассматриваются концепция соединения изгибающего момента и момента в плане и геометрической матрицы жесткости.

ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИИ

67. Задачи колебаний без затухания

67.1 Вступление. В первых двух главах этой книги мы показали, как любая задача расчета упругой конструкции, подвергаемой статическим нагрузкам, может быть сведена к выражению

$$[K] \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_e = \{P\},$$

где $[K]$ — жесткость объединенной конструкции; $\{\delta\}$ — матрица всех узловых смещений; $\{P\}$ — матрица всех узловых нагрузок.

Если конструкция движется, то по хорошо известному принципу д'Аламбера задача может быть сведена к статической приложением сил, равных произведению масс на ускорения (с отрицательным знаком).

Так, если, например, в узлах сооружения сосредоточены массы и никакие другие внешние силы не действуют, то мы получим следующую величину динамических сил в узлах:

$$\{R_i\} = -M_i \frac{d^2 \{\delta_i\}}{dt^2} = -M_i \{\ddot{\delta}_i\}. \quad (\text{XI.1})$$

Обычно масса распределяется по всему элементу, в результате ускорение есть распределенная нагрузка $\{p\}$ того типа, который

описан в главе II. Если масса на единицу объема обозначена ρ и никакие другие внешние силы не действуют, то мы получим

$$\{p\} = -\rho \frac{d^2 f}{dt^2} = -\rho \{\ddot{f}\}. \quad (\text{XI.2})$$

Замечая, что $\{f\}$ в любой точке элемента можно выразить как функцию узловых смещений (см. уравнение (II.1)), можно записать

$$\{p\} = -\rho [N] \{\ddot{\delta}\}^e. \quad (\text{XI.3})$$

Распределенные нагрузки снова с помощью общих процедур, описанных в главе II, могут быть выражены как эквивалентные узловые силы (II.11).

$$\{F\}_p^e = -\int [N]^T \{p\} d \text{vol} = \left\{ \int [N]^T \rho [N] d(\text{vol}) \right\} \{\delta\}^e = [m]^e \{\delta\}^e. \quad (\text{XI.4})$$

Объединяя все внешние силы $\{R_i\}$ и добавляя в каждый узел силы $\{F^e\}_{ip}$, мы получим вместо уравнения (I.12)

$$[K] \{\delta\} = -([M^0] + [M]) \{\ddot{\delta}\} + \{P\}. \quad (\text{XI.5})$$

в котором

$$[M^0] = \left[\begin{array}{ccc|c} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_n \end{array} \right] \quad (\text{XI.6})$$

есть матрица внешних масс, прикладываемых к узлам, $[M]$ есть общая матрица масс, представляющая объединение матриц массы элементов $[m]^e$,

$$[m]^e = \int [N]^T \rho [N] d(\text{vol}), \quad (\text{XI.7})$$

проведенное по тем же правилам, которыми мы пользовались при объединении матрицы жесткости конструкции из отдельных элементов, т. е.

$$[M_{im}] = \Sigma (m_{im})^e, \quad (\text{XI.8})$$

где суммирование производится по всем элементам.

Нагрузка $\{P\}$ в уравнении (XI.5) сохраняется в случае, если внешние силы продолжают оказывать воздействие во время движения.

Интересно отметить, что, когда делались первые попытки решать динамические задачи подобного характера, масса элемента обычно целиком произвольно прикладывалась в узлах, в результате чего всегда получали матрицу типа $[M^0]$, даже если не имелось реальных концентрированных масс. Ненужность подобной процедуры, ведущей к плохому приближению, впервые была от-

мечена Archer [1] и независимо Leckie и Lindberg [2] в 1963 г. Общая разработка результата (XI.7) сделана Zienkiewicz и Cheung [3]. Термин «соответствующая матрица массы» относится к матрице массы, распределенной по элементу. Этот термин излишен, так как эта матрица является единственно возможной матрицей, которую можно использовать в расчетах.

67.2 Свободные колебания. При отсутствии внешних сил уравнение (XI.5) может быть записано

$$[K] \{\delta\} = -[M] \{\ddot{\delta}\}. \quad (\text{XI.9})$$

В этом уравнении матрица концентрированных узловых масс либо опускается совсем, либо просто добавляется к матрице массы элемента.

Уравнение (XI.9) типично для всех задач колебаний с конечным числом степеней свободы. При собственных колебаниях все точки движутся в фазе, поэтому мы можем записать

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} \sin \omega t, \quad (\text{XI.10})$$

откуда

$$\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2 \{\delta_0\} \sin \omega t.$$

Подставляя в уравнение (XI.9), получаем следующее условие:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta_0\} = 0. \quad (\text{XI.11})$$

Это уравнение является типичным для задач на собственные значения. Если матрицы $[K]$ и $[M]$ имеют размер $n \times n$, то мы будем иметь n различных значений угловой частоты ω , которым будет удовлетворять уравнение (XI.11), и они рассматриваются как собственные частоты системы.

Каждая из этих частот будет связана с конкретной формой или «модой» $\{\delta_0\}$, в которых установлены отношения различных узловых смещений, но неизвестны их величины. Для нахождения собственных значений и мод системы, данной в уравнении (XI.11), имеется много методов численного решения; мы отсылаем читателя к таким классическим книгам, как работы Crandall [4] или Wilkinson [5]. Подробности решения не рассматриваются в данной книге.

Во многих случаях для решения задачи можно использовать стандартные вычислительные программы. В большинстве таких программ задача на собственные значения представлена в форме

$$[H] \{X\} = \lambda \{X\}, \quad (\text{XI.12})$$

где $[H]$ — симметричная матрица.

Если $\lambda = 1/\omega^2$, мы можем записать уравнение (XI.11) как

$$[K]^{-1} [M] \{\delta_0\} = \lambda \{\delta_0\}, \quad (\text{XI.13})$$

но в общем случае $[K]^{-1} [M]$ не будет симметрично.

Если, однако, мы запишем в треугольной форме

$$[K] = [L][L]^T,$$

где $[L]$ — матрица, имеющая только нулевые коэффициенты над диагональю, то получим, умножив уравнение (XI.13) на $[L]^{-1}$,

$$[L]^{-1}[M]\{\delta_0\} = \lambda [L]^T \{\delta_0\}.$$

Полагая

$$[L]^T \{\delta_0\} = \{Z\}, \quad (\text{XI.14})$$

получаем окончательно

$$[H]\{Z\} = \lambda \{Z\}, \quad (\text{XI.15})$$

где

$$[H] = [L]^{-1}[M][L]^{-1T}, \quad (\text{XI.16})$$

что соответствует форме уравнения (XI.12), а матрица $[H]$ должна быть симметрична.

Определив λ^1 (или выбрав только несколько самых больших величин, соответствующих основным периодам), находим формы $\{Z\}$ и далее с помощью уравнения (XI.14) — формы $\{\delta_0\}$.

67.3. *Матрицы массы для некоторых типичных элементов.* Нецелесообразно получать в явной форме все матрицы массы для различных элементов, рассмотренных в предыдущих главах. Здесь будут выбраны лишь некоторые примеры.

Плосконапряженное и плоскодеформированное состояния

Используя треугольные элементы, рассмотренные в главе III, определяем матрицу $[N]$ как

$$[N] = [IN'_i, IN'_j, IN'_n],$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а по уравнению (III.8) получаем

$$N'_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta,$$

где Δ — площадь треугольника.

Если толщина элемента t постоянна внутри элемента, получаем для уравнения матрицы массы (XI.17)

$$[m]^e = \rho t \int \int [N]^T [N] dx dy, \quad (\text{XI.17})$$

¹ С помощью применения хорошо известного итерационного метода Stodola — Vianella к уравнению (XI.15) получим наибольшую собственную величину λ или наименьшую собственную частоту. Это объясняет, почему собственное значение ω^2 было здесь вторично определено.

или

$$[m_{rs}]^e = \rho t [I] \iint N_r N_s dx dy. \quad (\text{XI.18})$$

Если подставить соотношения (III.8), то можно показать, что

$$\int N_r N_s dx dy = r \neq s \frac{1}{12} \Delta$$

или

$$r = s = \frac{1}{6} \Delta \quad (\text{XI.19})$$

Таким образом, принимая за вес элемента

$$\rho t \Delta = W,$$

получаем матрицу массы

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (\text{XI.20})$$

Если масса прилагается к узлам тремя равными частями, матрица массы, даваемая элементом, будет иметь вид

$$[m]^e = \frac{W}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.21})$$

Разумеется, оба результата значительно отличаются.

Изгиб плиты. Изгиб плит представляет собой проблему существенного инженерного значения. Такие задачи, как колебания покрытия мостов, вращение лопастей турбин и т. д., невозможно сформулировать аналитически. Важность использования надлежа-

щей матрицы массы вместо произвольного приложения массы подчеркивается в нескольких работах [6, 7, 8, 9]. Если взять, например, четырехугольный элемент плиты (см. параграф 38), то функция смещения определяется по уравнению (VII.7)

$$[N] = [P] [C]^{-1} \quad (XI.22)$$

Обозначения те же, что в главе VII.

Можно видеть, что матрица $[C]$ не зависит от координат, а матрица $[P]$ определяется по уравнению (VII.8)

$$[P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3].$$

Таким образом, с помощью уравнения (XI.7) определяем матрицу элемента плиты постоянной толщины

$$[m]^e = \rho t [C]^{-1T} \left(\int \int [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1}. \quad (XI.23)$$

Снова необходимо определить только центральный интеграл, что не представляет трудности, а полная матрица может быть получена путем умножения матриц. Явное выражение было дано Dawe [7] и приводится в табл. 8.

Таблица 8

Матрица массы для треугольного элемента плиты

$$m^e = [L] [M] [L]$$

$$\lambda = \frac{\rho t ab}{6300}$$

	3454																		
	-461	80																	
	461	-63	80	(L) определяется в табл. 1 как симметричная															
	1226	-274	199	3454															
	274	-60	42	461	80														
	199	-42	40	461	63	80													
	1226	-199	274	394	116	116	3454												
	-199	40	-42	-116	-30	-28	-461	80											
	-274	42	-60	-116	-28	-30	-461	63	80										
	394	-116	116	1226	199	274	1226	-274	-199	3454									
	116	-30	28	199	40	42	274	-60	-42	461	80								
	-116	28	-30	-274	-42	-60	-199	42	40	-461	-63	80							

Подобные матрицы массы можно получить для треугольных элементов, которые рассмотрены в параграфе 39 и дальше. Явное формулирование в этом случае не приводится, а детали алгебры представляются читателю.

При решении с помощью таких элементов рекомендуется провести численное интегрирование.

Оболочки. Если нам известны матрицы массы для плоского и изгибного движений элемента, то можно опять найти матрицы массы, относящиеся к общей системе координат. Правила преобразования вполне очевидны и будут те же, что и для сил. Вывод матриц массы для каждого элемента в общей системе координат и окончательный вид ансамбля матриц масс, связанных с узлом,

производится тем же образом, что и аналогичные операции для матрицы жесткости (см. главу VIII).

Поэтому в принципе задачи колебания оболочек не представляют особых трудностей.

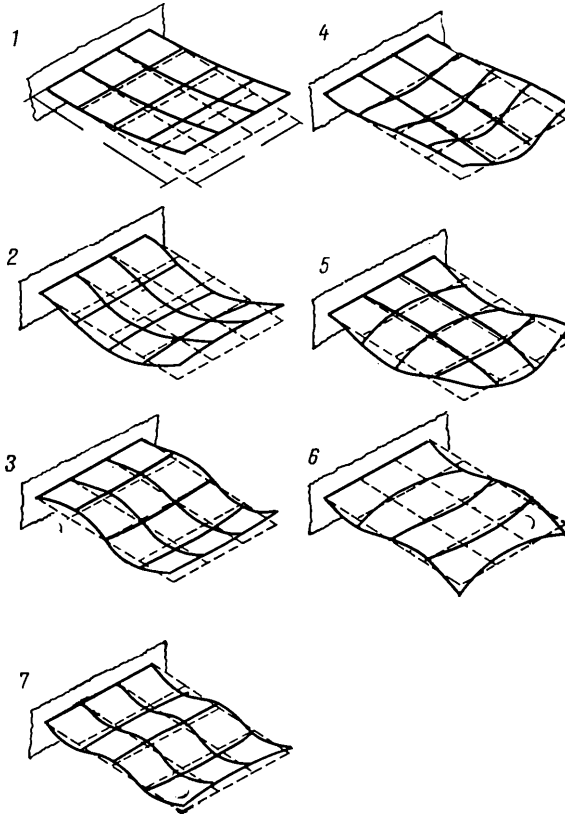


Рис. 85. Симметричные формы колебания плиты (в скобках представлены экспериментальные данные, а под ними — результаты по методу конечных элементов с использованием представления кусочных масс) формой:

1 — 0/0 376 Гц ($\frac{375}{366}$ Гц); 2 — 0/1 2361 Гц ($\frac{2330}{2113}$ Гц)
 3 — 0/2 6796 Гц ($\frac{6580}{5627}$ Гц); 4 — 2/0 4772 Гц ($\frac{4996}{3655}$ Гц);
 5 — 2/1 Гц ($\frac{8034}{6152}$ Гц); 6 — 2/2 13 063 Гц; 7 — 0/3 13 233 Гц
 (12 819 Гц)

67.4 Некоторые примеры. Ниже приводятся два примера колебания оболочек. В первом примере рассматривается консольная плита с помощью матриц четырехугольных элементов (пара-

граф 38). Плита разделена на 12 элементов, учитывая условия закрепления допускается 48 степеней свободы (3 в каждом узле).

На рис. 85 и 86 даны результаты первых 13 форм колебания; полученные частоты сравниваются с результатами тщательно проведенных испытаний. Наибольшие расхождения в частотах составляют порядка 4,5%, средние расхождения в два раза меньше.

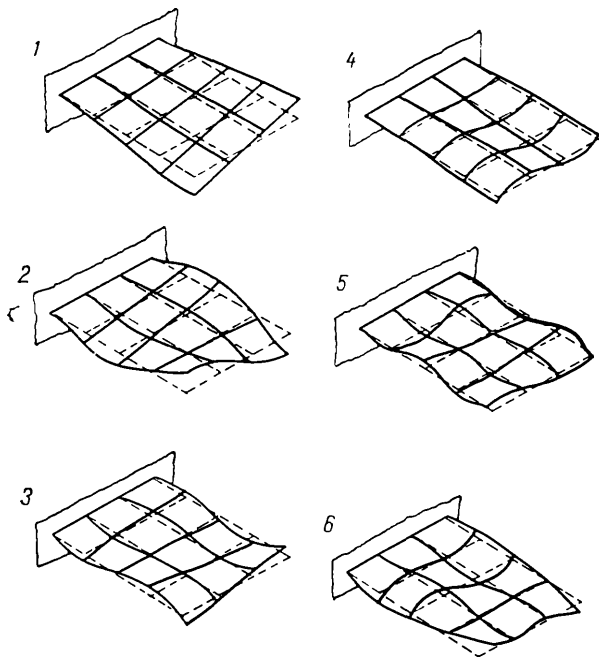


Рис. 86. Несимметричные формы колебания плиты, представленной на рис. 87:

1 — 1/0 1,197 Гц ($\frac{1142}{1076}$ Гц); 2 — 1/1 4083 Гц ($\frac{3909}{3450}$ Гц)
 3 — 1/2 8427 Гц ($\frac{8099}{6542}$ Гц); 4 — 3/0 12 070 Гц (12 619 Гц):
 5 — 1/3 14 428 Гц (14 070 Гц); 6 — 3,1 15 071 (15 443 Гц)

Для сравнения показаны результаты приложения масс элемента непосредственно в узлах. Результаты подобного приложения дают расхождения с экспериментом до 20%.

Отсюда очевидно использование правильных матриц массы элемента.

Во втором примере, показанном на рис. 87, снова рассматривается такая же консольная плита. В этом случае принято разбиение только на 4 треугольных элемента (с 12 степенями свободы). Результаты сравниваются с точными результатами, полученными Barton [10].

Для первых четырех форм и частот результаты даны в трех столбцах. В первом столбце даны результаты, полученные при использовании треугольной матрицы с несогласованными накло-

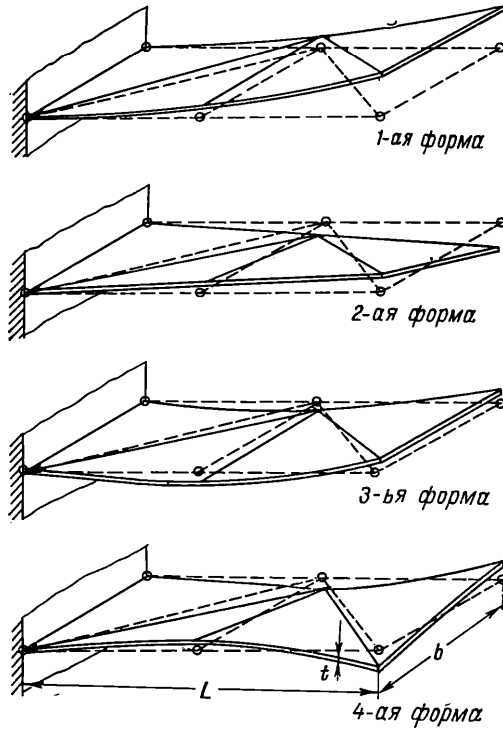


Рис. 87. Колебание консольной плиты, разбитой на 4 треугольных элемента.
Виды формы

Данные: $E=30 \times 10^6$ фунта/кв. футы; $t=0,1$ дюйма; $L=2$ дюйма; $b=1$ дюйм; $\nu=0,3$; $\rho=0,283$ фунта/футы³.

Цифры в столбцах соответствуют частотам в Гц соответственно для точного решения: «несогласованных» треугольных элементов; согласованных треугольных элементов с корректирующей функцией в уравнении (VII.51); согласованных треугольных элементов с корректирующей функцией в уравнении (VII.52):

1-я форма	846 826	3-я форма	5266 5157
	861		6156
	864		6578
2-я форма	3638 3728	4-я форма	11 870 12 035
	4293		15 813
	4369		16 585

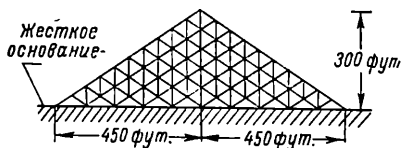


Рис. 88. Представление плотины в виде конечных элементов

нами (параграф 38), в остальных двух столбцах используются корректирующие функции, данные в главе VII, с помощью которых восстанавливается непрерывность наклона. В этом примере наиболее точные результаты получены при простейшем формулировании, где ошибки составляют менее 3% для всех частот.

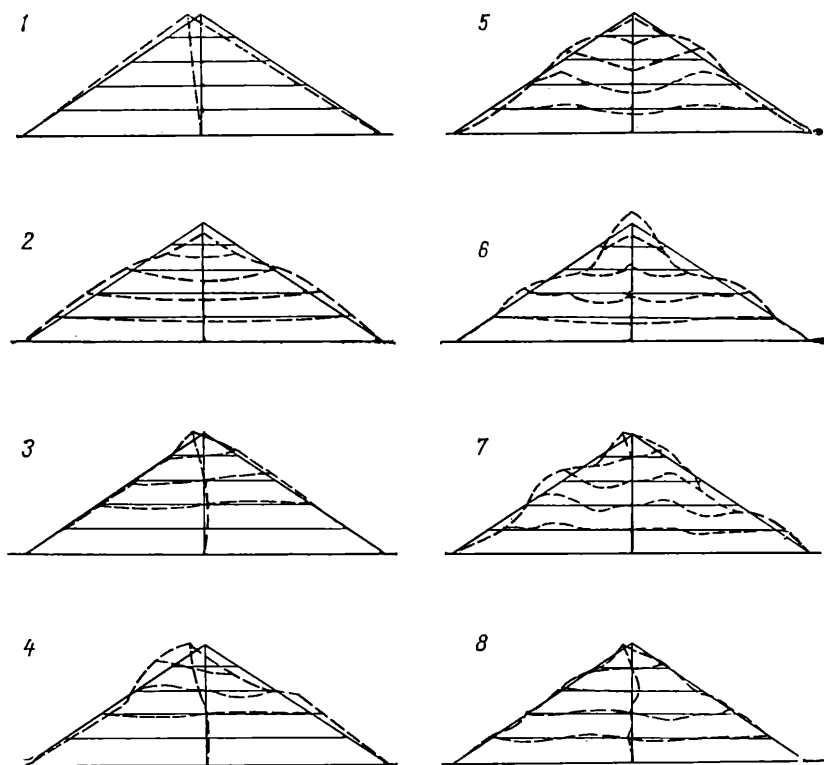


Рис. 89. Виды форм и частот собственных колебаний земляной плотности (формы 1—8) (Clough and Chopra [11]):

1=7,71 рад/с; 2=12,52 рад/с; 3=14,60 рад/с; 4=19,31 рад/с; 5=20,12 рад/с; 6=23,10 рад/с;
7=23,75 рад/с; 8=25,95 рад/с

Следует, однако, заметить, что эти результаты не устанавливают границы для частот, так как они могут лежать выше и ниже точных значений.

При согласованных функциях формы все результаты будут в районе верхних границ частот, как и следовало ожидать, поскольку принятое определение всегда дает результаты на верхней границе жесткости (см. главу II).

Другие примеры решения задач о собственных колебаниях методом конечных элементов можно найти в работах [7—15].

На рис. 88 и 89 показано определение собственных частот в

двумерной задаче при плоскодеформированном состоянии. Здесь рассматриваются собственные колебания земляной плотины, поведение которой соответствует поведению упругого тела [11].

68. Задачи колебаний с затуханием

При затухании вязкого типа силы, пропорциональные скорости или первой производной смещения $\{\delta\}$ по времени, препятствуют движению. Так как вязкое затухание ни в коей мере не является единственным типом затухания, существующего на практике, оно является целесообразным первым приближением, которое вводится в вычисления и которое будет сейчас рассмотрено.

Нелинейное затухание, которое возникает в некоторых системах, может быть приведено к линейному в первом приближении или может рассматриваться с помощью вычисления по шагам. При включении вязкого затухания уравнение (XI.5) (в котором опять для краткости опускается член M^0) может быть записано

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{P\}, \quad (\text{XI.24})$$

где $[C]$ — матрица затухания.

Если установлен закон сопротивления движению, то матрица $[C]$ находится тем же путем, что и матрица массы. При использовании другого подхода вязкие демпферы принимаются приложенными в каждом узле, что позволяет получить матрицу $[C]$ простой диагональной формы. Такое произвольное приложение имеет, однако, те же недостатки, что и приложенные матрицы массы, которые обсуждались ранее.

Рассмотрим теперь реакцию на вынужденные колебания, где внешняя сила $\{P(t)\}$ периодична и может быть записана

$$\{P(t)\} = \{P_0\} e^{i\omega t} \quad (\text{XI.25})$$

Мы получаем следующую форму решения:

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} e^{i\omega t}, \quad (\text{XI.26})$$

где $\{\delta_0\}$ является, в общем случае, комплексным (в результате запаздывания фазы). Подставляя в уравнение (XI.24) и решая относительно $\{\delta_0\}$, получим

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]] \{\delta_0\} = \{P_0\}. \quad (\text{XI.27})$$

Так как мы можем записать

$$\begin{aligned} \{\delta_0\} &= \{a\} + i \{b\}, \\ \{P_0\} &= \{q\} + i \{h\}, \end{aligned} \quad (\text{XI.28})$$

из уравнения (XI.27) можно получить две системы совместных уравнений.

Сравнив вещественную и комплексную части, получим

$$\left. \begin{aligned} ([K] - \omega^2 [M]) \{a\} - \omega [C] \{b\} &= \{q\} \\ \omega [C] \{a\} + ([K] - \omega^2 [M]) \{b\} &= \{h\} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{XI.29})$$

где все величины вещественны.

Решив эту систему уравнений, мы получим реакцию системы с затуханием на периодическое воздействие силы любой угловой частоты ω .

Некоторые преимущества имеет другой подход, использующий понятие нормализованной формы. Рассмотрим сначала уравнение свободного незатухающего колебания, связанное с уравнением (XI.24),

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta'_0\} = 0.$$

Решение его дает n собственных величин ω_i и собственных форм $\{\delta'_0\}_i$. Любое произвольное движение $\{\delta\}$ может рассматриваться как суперпозиция всех форм, взятых в соответствующих пропорциях.

Так, мы можем записать

$$\{\delta\} = [\{\delta'_0\}_1, \{\delta'_0\}_2, \dots] \{z\} = [F] \{z\}. \quad (\text{XI.30})$$

Если уравнение (XI.30) подставить в уравнение (XI.24), мы получим

$$[M] [F] \{\ddot{z}\} + [C] [F] \{\dot{z}\} + [K] [F] \{z\} = \{P\}.$$

Или, предварительно умножив на $[F]^T$,

$$\begin{aligned} ([F]^T [M] [F]) \{\ddot{z}\} + ([F]^T [C] [F]) \{\dot{z}\} + ([F]^T [K] [F]) \{z\} &= \\ &= [F]^T \{P\}. \end{aligned} \quad (\text{XI.31})$$

Теперь, из хорошо известного свойства собственных форм [4], вследствие их ортогональности, такие произведения

$$\{\delta'_0\}_r^T [M] \{\delta'_0\}_s = 0 \quad r \neq s. \quad (\text{XI.32})$$

Также всегда можно нормализовать формы¹ (так как они не определены масштабным коэффициентом), так что

$$\{\delta'_0\}_r^T [M] \{\delta'_0\}_s = 1 \quad \text{при} \quad r = s = i. \quad (\text{XI.33})$$

¹ «Нормализация» форм как отдельный шаг не обязательна. Можно просто определить величину

$$\{\delta'_0\}_r^T [M] \{\delta'_0\}_i = M_i^*.$$

Уравнение (XI.37) включает в себя этот член.

Этот результат будет иметь силу и в случае, если матрица $[K]$ занимает центральное положение в уравнении (XI.32), так как для собственных форм

$$[K] \{\delta_0\}_i = \omega_i^2 [M] \{\delta_0\}_i.$$

Если теперь допустить, что опять аналогичные результаты будут действительны для матрицы затухания, мы увидим, что система совместных уравнений, полученных из уравнений (XI.31), распадается, так как все произведения, заключенные в скобки, окажутся диагональными. Если мы представим

$$\{\delta_0\}_r [C] \{\delta_0\}_s = 2\omega_i c_i \quad \text{при } r = s = i,$$

то уравнение (XI.31) становится системой n уравнений, причем каждое из них имеет вид

$$\ddot{z}_i = (\omega_i c_i) z_i + \omega_i^2 z = \sum_{r=1}^n F_{ir} P_r(t). \quad (\text{XI.34})$$

Каждое из этих уравнений решается независимо, так как такое уравнение содержит одну переменную величину и при решении не возникает трудностей. Так определяется реакция системы с затуханием для любой формы $\{P_i(t)\}$, и в случае, если $\{P_i(t)\}$ будет периодичным и аналогичным по форме уравнению (XI.25), результаты будут простыми. Иногда методом изучения соответствующей величины ω_i можно заключить, что реакция данной частоты будет ничтожной и, таким образом, априорно ограничить вычисления лишь несколькими основными значениями z .

69. Численные расчеты для случайного силового отклика

Суммарная реакция системы на непериодическую случайную силу-вектор $\{P(t)\}$ может быть найдена различными путями. Если известны все периоды и формы свободных колебаний, то начальной точкой такого интегрирования может стать уравнение (XI.34). В этом случае можно, например, определить реакцию на одиночный импульс, приложенный в любой момент времени, а далее использовать интеграл суперпозиции (Дюамеля) для получения реакции на действующую вынужденную силу [15].

Другой способ предусматривает использование рекуррентных формул, которые можно применить к уравнению (XI.34), что позволит провести простое пошаговое интегрирование. Такие рекуррентные формулы обеспечивают прямой подход к исходному уравнению (XI.24) без необходимости определения специального поведения демпфирующей $[C]$ матрицы.

С помощью такого прямого подхода можно определить матрицы нелинейной жесткости и затухания тем способом, который обсуждается в главе XII. В этой части мы даем обзор подобных рекур-

рентных методов. С помощью рекуррентных формул производные по времени, присутствующие в уравнении (XI.24), заменяются соответствующими разностями смещения между данным конкретным промежутком времени и предшествующим ему промежутком. Допустив, что эти предшествующие (начальные) состояния нам известны, можно найти решение задачи в данный момент и повторить этот же метод решения для следующих моментов времени.

Многие формулы и методы для этих процессов рассматриваются в соответствующих работах (см. Crandall [4] и Biggs [16]).

Некоторые из этих методов требуют, чтобы временные интервалы были малыми долями минимального собственного периода колебаний для обеспечения устойчивости численного расчета. В других случаях допустимы большие промежутки времени.

Типичным способом оказывается такой, где предполагается линейно изменяющееся ускорение [17]. Пусть промежутки времени будут обозначены h , а общее время определяется как кратное этого промежутка. Так, в промежутке времени между $(n-1)h$ и nh ускорение будет изменяться линейно. В результате простого интегрирования получаем для скорости в конце каждого промежутка

$$\{\dot{\delta}\}_n = \{\dot{\delta}\}_{n-1} + (\{\ddot{\delta}\}_{n-1} + \{\ddot{\delta}\}_n) h/2. \quad (\text{XI.35})$$

После дальнейшего интегрирования смещения в конце каждого промежутка будут

$$\{\delta\}_n = \{\delta\}_{n-1} + h \{\dot{\delta}\}_{n-1} + h^2 \{\ddot{\delta}\}_{n-1}/3 + h^2 \{\ddot{\delta}\}_n/6. \quad (\text{XI.36})$$

Если уравнение (XI.24) записать для конца интервала, мы получим

$$[M] \{\ddot{\delta}\}_n + [C] \{\dot{\delta}\}_n + [K] \{\delta\}_n = \{P\}_n. \quad (\text{XI.37})$$

Отсюда $\{\delta\}_n$ может быть получена как функция величин в начале промежутка, если при подстановке уравнений (XI.35) и (XI.36) обе величины $\{\delta\}_n$ и $\{\dot{\delta}\}_n$ будут опущены.

В результате получим

$$\{\ddot{\delta}\}_n = [\Omega] (\{P\}_n - [C] \{A\}_n - [K] \{B\}_n), \quad (\text{XI.38})$$

где

$$[\Omega] = [[M] + h[C]/2 + h^2[K]/6]^{-1}, \quad (\text{XI.39,a})$$

$$\{A\}_n = \{\dot{\delta}\}_{n-1} + h \{\ddot{\delta}\}_{n-1}/2 = \{A\}_{n-1} + h \{\ddot{\delta}\}_{n-1}, \quad (\text{XI.39,b})$$

$$\{B\}_n = \{\delta\}_{n-1} + h \{\dot{\delta}\}_{n-1} + h^2 \{\ddot{\delta}\}_{n-1}/3 = \{B\}_{n-1} + h \{A\}_n. \quad (\text{XI.39,c})$$

Если поэтому все три величины $\{\delta\}$, $\{\dot{\delta}\}$ и $\{\ddot{\delta}\}$ будут известны в начале каждого промежутка, то с помощью уравнений (XI.35),

(XI.36) и (XI.38) мы можем определить все эти величины в конце промежутка.

При $n=0$, являющейся начальной точкой интегрирования, обычно известны только смещения и скорости. Однако из уравнения (XI.37) величина начального ускорения может быть также определена как

$$\{\ddot{\delta}\}_0 = [M]^{-1} (\{P\}_0 - [C] \{\dot{\delta}_0\} - [K] \{\delta_0\}). \quad (\text{XI.40})$$

Вычисление в целом является громоздким, но вычисление каждого шага не представляет трудностей. Другой способ, использующий другую рекуррентную формулу, может быть определен, если мы запишем в дополнение к уравнениям (XI.35) и (XI.36) те же уравнения для предшествующего промежутка времени, а уравнение (XI.37) — для двух предшествующих промежутков. Затем можно будет опустить все величины скорости и ускорения и выразить вектор смещения $\{\delta\}_n$ как функцию $\{\delta\}_{n-1}$ и $\{\delta\}_{n-2}$.

Такая рекуррентная формула была выведена Chan, Cox и Benfield [18]. Она обладает хорошей устойчивостью. Эта система использовалась при решении задач со сложными колебаниями оболочек [19].

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

70. Изгиб плит с одновременным действием сил в плоскости (рис. 90)

Задача изгиба плит и плоское напряженное состояние рассматривались до сих пор как расчлененные задачи. Поэтому при рассмотрении поведения оболочек на этом основании производилось

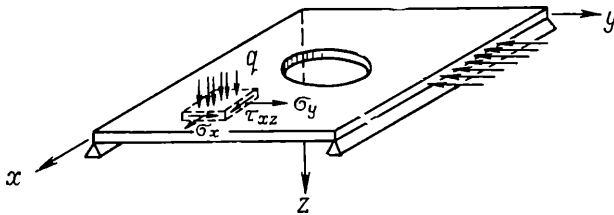


Рис. 90. Плита, подвергаемая одновременному воздействию сил в плане и сил изгиба

простое наложение результатов. По мере увеличения смещения плиты происходят деформации срединной поверхности и начинается внутреннее взаимодействие.

Для полного изучения поведения плит при этих условиях можно использовать общие процедуры решения задач с учетом больших деформаций, которые будут рассмотрены в главе XII.

Можно, однако, получить приближенное решение с помощью одношагового подхода.

В качестве начальной точки рассуждения мы допускаем, что система напряжений «в плоскости», существующих в плите $\{\sigma^0\}$, не испытывает воздействия дополнительных прогибов w . Это допущение содержится в классической теории устойчивости плит [20] и позволяет получить линейное решение задачи в первом приближении.

Появление смещения w приводит к дополнительным деформациям в срединной плоскости плиты. Как видно из рис. 91, если точки A и B срединной плоскости плиты движутся вертикально, первоначальная длина dx становится

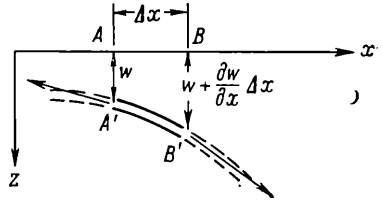


Рис. 91. Деформация в плане в результате бокового прогиба

$$dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots \right\}.$$

Таким образом, деформация срединной плоскости в направлении x может быть найдена при пренебрежении членов более высокого порядка

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{XI.41, a})$$

Таким же образом можно показать, что [20]

$$\epsilon_y^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad (\text{XI.41 б})$$

и

$$\gamma_{xy}^0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (\text{XI.41, в})$$

Дополнительная потенциальная энергия на единицу объема равна

$$\sigma_x^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y^0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right). \quad (\text{XI.42})$$

Последнее можно записать

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{XI.42, а})$$

Учитывая, что наклоны соотносятся с узловыми смещениями плиты, можно записать далее

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta\}^e. \quad (\text{XI.43})$$

Дополнительная потенциальная энергия для всего элемента легко выражается теперь следующим образом:

$$\{\delta\}^{eT} [k_G]^e \{\delta\}^e, \quad (\text{XI.44})$$

$$[k_G]^e = \iint [G]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} [G] t dx dy. \quad (\text{XI.45})$$

Интегрирование производится по площади элемента. Эта дополнительная потенциальная энергия должна учитываться в случае, когда мы определяем свойства элемента таким же способом, как было описано в главе II.

Легко убедиться, что правила дифференцирования, изложенные здесь, дадут нам производные этой энергии по отношению к узловым смещениям $\{\delta\}^e$ в виде

$$[k_G]^e \{\delta\}^e, \quad (\text{XI.46})$$

при условии, если матрица $[k_G]$ будет симметричной, а напряжения $\{\sigma^0\}$ останутся постоянными. Таким образом, общий эффект рассматриваемого взаимодействия плоскостных напряжений просто увеличивает матрицу жесткости элемента $[k]^e$ на величину дополнительной жесткости $[k_G]^e$.

Эта дополнительная матрица жесткости теперь зависит от свойств элемента, а также от системы начальных напряжений внутри элемента. Эта матрица названа Аргирисом [21] матрицей геометрической жесткости, влияющей на изменение направления сил в связи с искривлением элемента. Поэтому она имеет важное значение при решении задач с большим смещением. Мартин рассматривает ее в таких же условиях как матрицу жесткости начального напряжения [22—24]. Для задач изгиба плит уравнение (XI.45) было выведено Кариг и Hartz [25]. Очевидно, эта методика не носит столь обобщенного характера, как методика, которая будет обсуждаться в связи с решением задач с большими смещениями, однако может использоваться при рассмотрении целого ряда задач. Элементы балочного типа [26] могут быть изучены точно так же.

Необходимо отметить, что уравнение (XI.45) дает возможность получить симметричные матрицы жесткости «начального напряжения». При соединении элементов задача расчета горизонтально

нагруженных плит с силами в плоскости всегда ведет к уравнению типа

$$[K]\{\delta\} + [K_G]\{\delta\} = \{P\}, \quad (\text{XI.47})$$

если рассматривать статические ситуации. В этом уравнении, где $[K]$ — составная матрица жесткости, объединенная на основе теории, изложенной в главе VII; $[K_G]$ — матрица геометрической жесткости или матрица начальных напряжений; $\{P\}$ — вектор внешних нагрузок.

Если известна начальная система сил плоскости, то независимо от ее распределения и знака (растяжение или сжатие) матрицы $[K_G]$ могут быть вычислены и задача решена с меньшими трудностями, чем при решении по методу отдельной теории плит.

71. Задачи устойчивости плит

Матрица $[K_G]$ зависит от начальной системы напряжений в плоскости и от массовых сил.

Пусть эта система пропорциональна масштабному коэффициенту λ , т. е. допустим, что все напряжения или массовые силы, вычисляемые для неких заданных условий, могут быть линейно увеличены с помощью этого коэффициента.

Из уравнения (XI.45) мы увидим, что новая величина

$$[K'_G] = \lambda [K_G], \quad (\text{XI.48})$$

где $[K_G]$ было вычислено для начально заданных условий.

Таким образом, если нет действия внешних нагрузок, уравнение (XI.47) может быть записано в виде

$$([K] + \lambda [K_G])\{\delta\} = 0. \quad (\text{XI.49})$$

Так как знак элементов $[K_G]$ может меняться в зависимости от направления напряжений, в целом возможно найти нетривиальные значения λ , а также связанные с ними «формы» $\{\delta\}$, для которых написанное выше уравнение удовлетворяется. Эта задача в точности совпадает с классической задачей собственных значений, которая рассматривалась в этой главе в связи с колебаниями (XI.11).

На практике нам нужно только низшее значение λ и связанную с ней форму, поэтому вычисления всегда менее громоздки, чем в динамических задачах.

72. Некоторые матрицы жесткости «начального напряжения» для плит

72.1 Прямоугольные элементы. Для несогласованных прямоугольных элементов плиты того типа, который был рассмотрен в параграфе 38, функции формы определяются с помощью уравнений (VII.4) — (VII.7). Для оценки матрицы жесткости начального

напряжения сначала необходимо определить матрицу наклона $[G]$.

Из уравнения (VII.4) мы можем записать

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \{\alpha\}, \quad (\text{XI.50})$$

или, вводя уравнение (VII.6) и обозначив большую матрицу в вышеприведенном уравнении как $[G']$, получаем

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G'] [C]^{-1} \{\delta\}^e \equiv [G] \{\delta\}^e. \quad (\text{XI.51})$$

Матрица жесткости начального напряжения или геометрическая матрица жесткости может быть теперь записана как

$$[k_G]^e = [C]^{-1T} \int \int t [G']^T \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} [G'] dx dy. \quad (\text{XI.52})$$

Снова t можно принять за постоянную, но для согласования с задачей плосконапряженного состояния необходимо задать линейное изменение каждого компонента $\{\sigma^0\}$. Такое предположение обуславливает определение различных форм вышеприведенной матрицы. Несколько таких форм были выполнены явно Кариг и Hartz [25]; интересующегося читателя отсылаем к этой работе.

72.2 Треугольные элементы. Такой элемент имеет то преимущество, что подходит для любых границ и позволяет применять меняющееся разбиение.

Разбивка на треугольные элементы может использоваться сначала для определения напряжений в плоскости. Результаты этого анализа могут затем включаться непосредственно в вычисление матрицы $[k_G]$. Так как треугольные элементы связаны с состоянием постоянного напряжения, целесообразно распространить это допущение на определение матрицы $[k_G]$.

Это можно записать в виде

$$[k_G] = \sigma_x^0 [k_{Gx}] + \sigma_y^0 [k_{Gy}] + \tau_{xy}^0 [k_{Gxy}], \quad (\text{XI.53})$$

где

$$[k_{Gx}] = t \int \int [G]^T \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} [G] dx dy, \quad (\text{XI.54})$$

если толщина элемента принимается постоянной.

Таким образом, для вычисления любого начального напряжения в плоскости достаточно трех основных матриц.

Алгебраические действия точно соответствуют системе решения, приведенной в параграфе 39. Снова степени свободы могут

Значения критической продольной нагрузки для квадратной плиты размерами $L \times L$

Нагрузка	Граничные условия	Параметр k	Значения параметра k и ошибки (в %) для различных случаев разбиения					
			Точное	4×4	6×6	8×8	10×10	12×10
Сжатие σ_x в одном направлении	Все ребра свободно опертые	$k = \frac{t\sigma_x L^2}{\pi^2 D}$	4	3,77 (-5,7)	3,89 (-2,8)	3,93 (-1,7)	3,96 (-1,0)	3,98 (-0,6)
Сжатие σ_x в одном направлении	Вес ребра защемленные	$k = \frac{t\sigma_x L^2}{\pi^2 D}$	10,07	9,28 (-7,8)	9,61 (-4,6)	9,78 (-2,9)	9,89 (-1,8)	—
Изотропное сжатие $\sigma_x = \sigma_y$	Все ребра защемленные	$k = \frac{t\sigma_x L^2}{\pi^2 D}$	5,375	4,98 (-6,4)	5,08 (-4,5)	5,16 (-2,9)	5,22 (-1,8)	—
Сжатие в направлении центрального ребра	Свободное опирание продольного ребра жесткости EJ, A_r	$\frac{A_r}{Lt} = 0,20$ $\frac{EJ}{LD} = 5; k = \frac{t\sigma_x L^2}{\pi^2 D}$	9,72	9,46 (-2,7)	9,58 (-1,5)	9,63 (-1,0)	9,65 (0,7)	—

Примечание. Основано на данных Кариг и Hartz [25].

быть ограничены просто условиями закрепления плиты, а конечная матрица жесткости находится с помощью преобразования, данного в уравнении (VII.34).

72.3 Некоторые примеры. Различные примеры задач устойчивости разработаны Кариг и Hartz [25]. Использование прямоугольных элементов накладывает известные ограничения на форму плиты, но при этом не возникает никаких трудностей при рассмотрении произвольной неоднородной системы напряжения или анизотропных и неоднородных свойств.

Достижимая степень точности показывается на примере квадратной плиты в различных условиях нагружения и закрепления краев. В табл. 9 приведены величины критической нагрузки при различном разбиении на элементы. Эти величины сравниваются с точными. Рассмотрен случай подкрепления упругими ребрами с тем, чтобы показать, что и этот случай не представляет каких-либо трудностей.

73. Колебание растянутых или сжатых плит

Свободные или вынужденные колебания плит, нагруженных начальной системой сил в плоскости, могут быть рассмотрены без затруднений. Как было показано в параграфе 66 и далее, распределенная масса дает вектор силы

$$- [M] \{\ddot{\delta}\}$$

и, если нет других внешних сил (свободное колебание), уравнение (XI.47) дает для гармонического движения (см. уравнение (XI.11)):

$$([K] + [K_G] - \omega^2 [M]) \{\delta_0\} = 0. \quad (XI.55)$$

Для известной системы сил в плоскости $[K_G]$ задано и задача аналогична задаче обычных колебаний.

Когда начальные напряжения (в плоскости) приближаются к величине, при которой возникает неустойчивость, то из уравнения (XI.52) следует

$$([K] + [K_G]) \{\delta_0\} \rightarrow 0 \quad (XI.56)$$

и жесткость становится очень незначительной. Для таких систем сил в плоскости низшая частота колебания становится очень небольшой, и это представляет хорошо известный метод определения начала неустойчивости.

До тех пор пока $[K_G]$ не будет иметь структуру, аналогичную $[M]$, формы продольного изгиба и формы колебания не будут одинаковыми. При однородном сжатии и однородном распределении массы формы будут одинаковыми, что отмечалось многими исследователями, но в целом это не будет так.

74. Большие деформации и закритическое поведение плит при нагружении системой сил в плоскости

Приближенный метод решения подобных задач, представляющих большое практическое значение, возможен в том случае, если смещения не настолько велики, чтобы соотношение для кривизны

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

теряло свой смысл.

В работах, приведенных в параграфе 69, рассматривалось влияние напряжений в плоскости на изгиб, однако в то же время делалось допущение, что на систему сил в плоскости не влияет горизонтальная деформация.

Теперь, если будут вычислены деформации в плоскости, определяемые с помощью уравнения (XI.41), для данного значения смещения w , то система деформации в плоскости может быть исправлена. Если рассматривать эти деформации тем же методом, что и тепловые эффекты, можно легко вычислить изменения $\{\sigma^0\}$. Очевидно, что эта итерационная процедура может быть повторена до тех пор, пока не будет получена сходимость.

Этот процесс не представляет особых трудностей и позволяет учитывать относительно большие деформации плит в случае, если действуют горизонтальные нагрузки и нагрузки в плоскости. Если нет горизонтальной нагрузки, задача усложняется, так как в этом случае потеря устойчивости не определяется одной собственной величиной. При критической нагрузке, даваемой методами, описанными в предыдущем разделе, происходит бифуркация кривой деформация — нагрузка. Плита, однако, может выдержать гораздо большие нагрузки без потери устойчивости. Для определения такого поведения в закритической области необходимо решать задачу тем же методом, который рассматривался в предыдущем разделе при малой величине возмущающей горизонтальной нагрузки.

Постепенно увеличивая нагрузку в плоскости, можно изучить поведение плиты почти до состояния полной потери устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. S. Archer, Consistent mass matrix for distributed systems, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 89, ST4, p. 161, 1963.
2. F. A. Leckie and G. M. Lindberg, The effect of lumped parameters on beam frequencies, The Aero. Quarterly, 14, p. 234, 1963.
3. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, p. 471, 1964.
4. S. H. Crandall, Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956.
5. J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, 1965.
6. O. C. Zienkiewicz, B. Irons, and B. Nath, «Natural frequencies of complex, free or submerged, structures by the finite element method», in Symposium on Vibrations in Civil Engineering, London, April 1965.

7. D. J. Dawe, A finite element approach to plate vibration problems, *J. Mech. Eng. Sci.*, 7, p. 28, 1965.
8. R. J. Guyan, Distributed mass matrix for plate elements in bending, *J. A.I.A.A.*, 3, p. 567, 1965.
9. G. P. Bazelev, Y. K. Cheung, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending-conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
10. M. V. Barton, Vibration of rectangular and skew cantilever plates, *J. Appl. Mech.*, 18, pp. 129—34, 1951.
11. R. W. Clough and A. K. Chopra, Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Structures and Materials Research Report No. 65—8, Univ. of California, Berkeley, Calif., July, 1965.
12. G. C. Best, Vibration analysis of a cantilevered square plate by the stiffness matrix method, Proc. Conf. On Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
13. J. S. Archer and C. P. Rubin, Improved linear axi-symmetric shell-fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
14. J. Argyris, Continua and Discontinua, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
15. Y. K. Lin, A method for the determination of the matrix of impulse response functions with special reference to applications in random vibration problems, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
16. J. M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1965.
17. E. L. Wilson, and R. W. Clough, Dynamics Response by Step-by-step matrix analysis, Symp. on The Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon, Oct. 1962.
18. S. P. Chan, H. L. Cox, and W. A. Benfield, Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical systems, *J. roy. aero. Soc.*, 66, pp. 457—960, 1962.
19. S. Klein and R. J. Sylvester, The linear elastic dynamic analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
20. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 2nd edition, 1961.
21. J. H. Argyris, S. Kelsey, and H. Kamel, Matrix Methods in Structural Analysis, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, 1964, pp. 1—164.
22. M. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin, and R. J. Melosh, Large deflections of structures subject to heating and external loads, *J. Aero-Space Sci.*, 27, 97—106, Feb. 1960.
23. M. J. Turner, H. C. Martin, and R. C. Weikel, Further Development and Applications of the Stiffness method, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, 1964, pp. 203—66.
24. M. C. Martin, On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
25. K. K. Kapur, and B. J. Hartz, Stability of thin plates using the finite element method, Proc. A.S.C.E., EM2, pp. 177—95; 1966.
26. R. H. Gallagher, and J. Padlog, Discrete element approach to structural instability analysis, *J.A.I.A.A.*, 1, no. 6; pp. 1437—39, 1963.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ — УПРУГОСТЬ, ПОЛЗУЧЕСТЬ И БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ

75. Вступление

С помощью итерационного или пошагового метода можно распространить линейные решения всех упругих задач, исследуемых в этой книге, на нелинейные задачи.

Особый интерес вызывают два класса задач. В первом — нелинейность определена свойствами материала, во втором — нелинейность появляется в результате больших деформаций и геометрических изменений конструкции и ее элементов¹. В этой главе рассматривается общий подход к обоим видам нелинейностей. О сходимости описываемых процессов можно судить по исследованию отдельных случаев, хотя проделана уже большая работа, доказывающая, что на практике сходимость обычно достигается.

Для полноты в эту главу включается раздел, в котором рассматриваются вязко-упругие материалы, где математическая задача будет линейной, но где необходимо учитывать влияние времени. Строго говоря, этот раздел выходит из рамок главы, но мы сочли целесообразным рассмотреть здесь такие задачи, так как с необходимостью их решения приходится часто сталкиваться.

76. Нелинейная упругость — прямой итерационный подход

Часто свойства материала сооружения таковы, что деформированное состояние единственным образом определяется через напряженное состояние. Случай истинной пластической деформации может быть аппроксимирован с помощью такого материала лишь тогда, когда происходит монотонное увеличение напряжений или определенных инвариантов напряжения.

Если такой материал будет изотропным, его свойства могут определяться таким же способом, как и в упругих задачах, с помощью двух величин E и ν . В этом случае обе эти величины зависят от развиваемых напряжений или деформаций. Например, если свойства материала в одноосном напряженном состоянии выражены кривой «напряжение — деформация», как показано на рис. 92, тогда (опять только для одноосных напряжений) мы, например, можем записать

$$E(\sigma) = E_0 \quad \text{при } \sigma < \sigma_0,$$
$$E(\sigma) = \frac{E_0 \varepsilon_0}{\varepsilon} \quad \text{при } \sigma > \sigma_0.$$

¹ Так называемые физическая и геометрическая нелинейности (прим. ред.).

В условиях трехосного напряженного состояния (секущий) модуль E и коэффициент Пуассона ν будут зависеть от инвариантов тензора напряжения или деформации или, в случае неизотропного состояния, от других комбинаций компонентов напряжения или деформаций. Например, можно предположить, что в упруго-пластическом материале эффективной деформацией будет такая, которая соответствует второму инварианту деформации*, т. е.

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} \sqrt{\{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2\}} \quad (\text{XII.1})$$

и что закон напряжение — деформация единственным образом связывает эффективное напряжение

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sqrt{\{\sigma_1 - \sigma_2\}^2 + \{\sigma_2 - \sigma_3\}^2 + \{\sigma_3 - \sigma_1\}^2} \quad (\text{XII.2})$$

с эффективной деформацией $\bar{\epsilon}^{**}$. В этом уравнении ϵ_1, σ_1 и т. д. выражают главные компоненты напряжения или деформации.

В таком случае в общем виде E и ν будут сложными, но известными функциями компонентов напряжения или деформации.

Теперь возможно продолжать вычисления итерационным путем, включающим следующие шаги:

1. К системе приложена полная нагрузка и определяются напряжения и деформации с помощью величин E и ν , соответствующих нулевому напряжению.

2. Для каждого элемента определяются новые величины E и ν в зависимости от состояния напряжения (или деформации), полученного на предыдущем шаге.

3. Снова производится упругий расчет, основанный на значениях постоянных упругости, найденных для каждого элемента на шаге 2 (предыдущем).

4. Повторяется шаг 2.

5. Повторяется шаг 3 и т. д.

В большинстве практических задач этот процесс приводит к сходимости***. Если E единственным образом определяется как

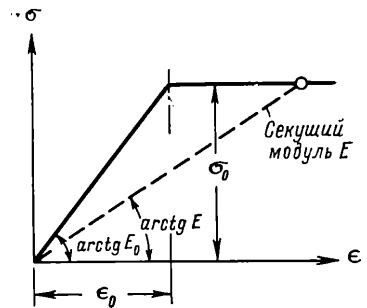


Рис. 92. Нелинейная упругость — модель идеального упругого пластического материала

* Соответствует (с точностью до постоянного множителя) корню квадратному из второго инварианта девиатора деформации (прим. ред.).

** Как было определено выше, эффективные величины соответствуют так называемым октаэдрическим величинам деформации и напряжения. В области линейной упругости отношение $\bar{\sigma}/\bar{\epsilon}$ равно модулю сдвига.

*** Указанная процедура решения, по-видимому, впервые сформулирована А. А. Ильюшиным и носит название метода «упругих решений» (прим. ред.).

функция эффективной деформации, то итерационный подход может быть представлен в виде диаграммы на рис. 93, а, где показано приближенное решение для типичного пластического поведения с затвердевающей деформацией и где E рассматривается как функция напряжения. Три или четыре итерации подобного типа обычно дают приемлемое решение [1, 2]. Этот же процесс успешно использовался при рассмотрении идеализированного скального материала с умеренным напряжением [3].

Предполагалось, что такой материал не может передавать растягивающих напряжений, в то время как сжатие могло осуществляться упруго. Такой материал будет в целом проявлять себя анизотропно. При возникновении деформации соответствующий модуль упругости, соответствующий главному направлению, равен нулю. Во всех остальных направлениях материал сохраняет свои начальные изотропные (или анизотропные) величины постоянных упругости.

Эта процедура на каждом шаге итерации требует определения направления анизотропии и двух величин модулей

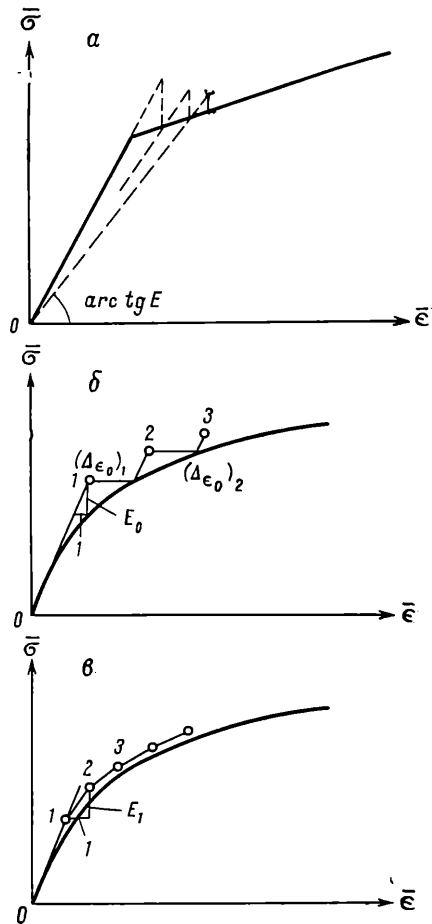


Рис. 93. Схематическое представление различных методов получения неупругих решений:

а — прямой итерационный метод (полная деформация E есть функция $\bar{\epsilon}$); б — метод приращения начальной деформации; в — метод приращения переменной упругости

упругости. На рис. 94 дан типичный пример, в котором рассматривается перераспределение напряжений у отверстия туннеля. Для удовлетворительной сходимости оказалось необходимым произвести четыре итерации.

77. Метод «приращение — начальная деформация» и решение упруго-пластических задач

Приближенное решение упруго-пластических задач, основанное на допущении однозначности связи напряжение — деформация, имеет несколько недостатков:

в период разгрузки пластическая деформация в любом элементе прекращается и происходит только упругая деформация;

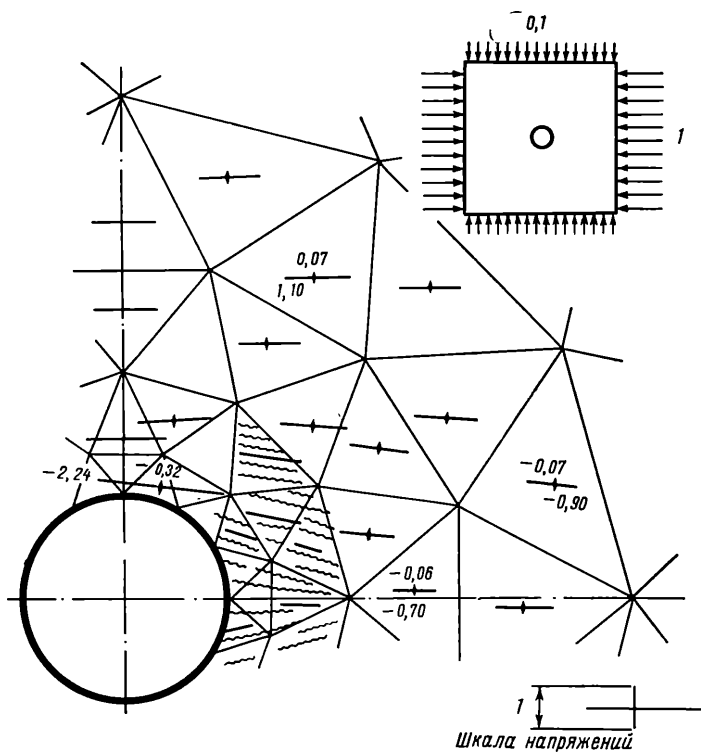


Рис. 94. Распределение напряжений около кругового отверстия в материале, физические свойства которого не допускают напряжений растяжения (трещиноватая скала). (Элементы, в которых наблюдалось образование трещин, заштрихованы)

хотя тип связи (см. рис. 93) вполне может быть заменен эквивалентными модулями упругости, этим же образом трудно составить надлежащее выражение для эквивалентных отношений Пуассона, даже в случае монотонного увеличения напряжения;

формулирование обычных форм закона пластичности и ползучести производится с разделением упругих и пластических эффектов и часто дается в форме приращений.

Для избежания этих трудностей и для обобщения методов решения задач ползучести (зависимых от времени) желательно применить другой подход. Удобный метод был предложен Gallagher [4], Arguris [5] и другими. Этот метод будет рассматриваться здесь под общим заглавием метод «приращение — начальная деформация». В соответствии с этим методом предполагается, что нагрузка прикладывается небольшими порциями. Хотя процесс пластической деформации не зависит от времени, нам будет удобнее допустить здесь, что каждый шаг связан с определенным промежутком времени. Это позволяет немедленно включить в рассмотрение зависящие от времени температурные изменения и дает возможность проводить дальнейшие расчеты задач ползучести.

В любой промежуток времени мы можем разделить общее приращение деформации $\Delta\{\epsilon\}$ на три его компонента — упругий, пластический и температурный, т. е.

$$\begin{aligned}\Delta\{\epsilon\} &= \Delta\{\epsilon_e\} + (\Delta\{\epsilon_p\} + \Delta\{\epsilon_\theta\}) = \Delta\{\epsilon_e\} + \Delta\{\epsilon_0\} = \\ &= [D]^{-1}\{\sigma\} + \Delta\{\epsilon_0\}.\end{aligned}\quad (\text{XII.3})$$

Если известны приращения пластической и температурной деформаций, то, рассматривая их как общее приращение начальной деформации $\{\epsilon_0\}$ (см. II.3), приращение или изменение напряжений $\Delta\{\sigma\}$ может быть найдено стандартным путем решения обычной упругой задачи. Если в начале промежутка времени состояние напряжения и деформации известно, то состояние в конце интервала времени определяется суммированием изменений приращений.

В целом при определении изменения температурной деформации в рассматриваемый отрезок времени не возникает трудностей. Однако приращение пластической деформации зависит одновременно от начального и от конечного уровня напряжения в интервале и в целом не может быть прямо определено.

Здесь возможны два пути вычисления:

1) интервалы времени, или приращения нагрузки берутся достаточно малыми, так что приращения пластической деформации, которые возникли в предыдущем интервале, могут использоваться для нахождения приращения напряжения в рассматриваемый интервал;

2) используемая в пункте 1 методика рассматривается как первый шаг итерации для конкретного интервала времени. После того как приращения напряжений и деформаций были таким образом найдены, эта методика используется для нахождения новой оценки величин приращения пластической деформации. Процесс итерации используется до тех пор, пока не будет получено надлежащей сходимости (в целом этот процесс позволяет брать большую величину шага времени или нагрузки).

Argiris [5] считает, что одной процедуры бывает обычно достаточно, но что улучшенное решение можно получить при исполь-

зовании ограниченного числа итераций (две или три) в каждый промежуток.

Методы определения приращений пластической деформации могут усложняться настолько, насколько этого требует данный процесс, при этом можно использовать любые законы поведения материала.

Например, не возникает никаких трудностей, если модули упругости будут зависеть от времени или температуры или если пластические законы будут зависеть от тех же факторов.

Ограниченное рассмотрение типичного пластического поведения будет дано в последующем разделе.

77.1. Приращения пластической деформации. Пластическая деформация обычно не вызывает изменения объема. Используя так называемую теорию общей деформации Hencky и Sokolovsky и считая поведение изотропным, соотношения между напряжением и деформацией в пластичности можно записать в той же форме, что и упругие, с коэффициентом Пуассона $\nu = \frac{1}{2}$. Например, для трехмерного случая можно записать следующие соотношения:

$$\Delta \varepsilon_{x,p} = C \left\{ \Delta \sigma_x - \frac{1}{2} \Delta \sigma_y - \frac{1}{2} \Delta \sigma_z \right\} \quad (\text{XII.4})$$

и

$$\Delta \gamma_{xy,p} = 3C \Delta \tau_{xy},$$

где C — коэффициент пропорциональности, который подставляется вместо $1/E$.

В более общей форме по аналогии с выражениями главы II мы можем записать для приращений пластической деформации во всех типичных случаях

$$\Delta \{\varepsilon_p\} = [D]^{-1} \Delta \{\sigma\}, \quad (\text{XII.5})$$

где

$$[D]^{-1} = C [D_0]^{-1},$$

причем $[D_0]^{-1}$ есть та часть матрицы упругости, которая одна зависит от коэффициента Пуассона и в которую теперь вводится $\nu = 0.5$.

Соотношение Prager — Mises [6] допускает, что постоянная C для материала с затвердевающей деформацией есть функция второго инварианта девиатора напряжения σ (XII.2).

Очевидно, можно вывести и более сложные соотношения, но для настоящих целей достаточно определить, что C есть функция $\bar{\sigma}$ и θ температуры и что C может быть дано в виде графиков от эффективной деформации и эффективного напряжения и оформлено для машинных вычислений в виде цифровых таблиц. Иногда

можно вводить другие соотношения явного типа. Такие соотношения часто имеют форму

$$\bar{\varepsilon}_p = K\bar{\sigma}^n,$$

где K и n — постоянные.

Таким образом, мы получим

$$C = -\frac{d\bar{\varepsilon}_p}{d\bar{\sigma}} = nK\bar{\sigma}^{n-1}. \quad (\text{XII.6})$$

С помощью этих правил вычисление приращений пластической деформации для материалов с затвердевающей деформацией не представляет трудностей. Однако, если рассматривается случай «идеальной» пластичности, возникают трудности, так как C стремится к бесконечности. Способ преодоления этих трудностей указан в следующем разделе.

Учитывая, что при разгрузке поведение материалов становится упругим, легко определить, что коэффициент C равен нулю в случае, если приращение эффективной деформации в предыдущей величине приращения было отрицательно. Более сложная ситуация, которая здесь не рассматривается, возникает при дальнейшей нагрузке.

Хотя теория общей деформации пластических деформаций удобна для пользования, она физически представляет лишь грубое приближение к реальному пластическому поведению. Теория, которая лучше соответствует действительности, построена на так называемых гипотезах приращения [6].

В ней допускается, что приращение компонентов деформации пропорционально действующим напряжениям и что общий множитель зависит от приращения эффективного напряжения $\bar{\sigma}$.

Уравнение (XII.4) заменяется

$$\Delta \varepsilon_{x,p} = \psi(\bar{\sigma}) \Delta \bar{\sigma} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \quad (\text{XII.7})$$

и

$$\Delta \gamma_{xy,p} = 3\psi(\bar{\sigma}) \Delta \bar{\sigma} \tau_{xy},$$

где σ_x , σ_y и т. д. — реальные, накопленные напряжения, возникающие из-за приращения эффективного напряжения.

Теперь опять нетрудно вычислить приращения пластической деформации в промежуток времени в случае, если известны реальные напряжения $\{\sigma\}$ и приращение эффективного напряжения. Уравнение (XII.5) теперь принимает вид

$$\Delta \{\varepsilon_p\} = [D_0]^{-1} \{\sigma\} \psi(\bar{\sigma}) \Delta \bar{\sigma}. \quad (\text{XII.8})$$

Для нахождения $\psi(\bar{\sigma})$ снова используются отношения Prager — Mises.

Пошаговое вычисление представляет собой медленный процесс, так как на каждой стадии необходимо повторно полностью решать задачу упругости. Если постоянные упругости не изменяются с температурой (или «возрастом»), то в каждом приращении мы будем иметь ту же самую матрицу упругости. Поэтому в дальнейшем при вычислениях удобнее обращать эту матрицу (полностью или частично), чтобы при следующих приращениях мы бы пользовались лишь простым матричным умножением. Этот переход показан в форме диаграммы на рис. 93, б.

78. Метод «приращение — переменная упругость»

Для идеально или почти идеально пластических материалов процедура, описанная в параграфе 77, оказывается невозможной.

При небольших приращениях нагрузки возникают очень большие (или бесконечные) пластические деформации, в результате чего сходимости не достигается. Для таких материалов необходимо использовать метод, являющийся промежуточным между двумя предыдущими возможностями. Нагрузка снова прикладывается путем приращений, но общая деформация под влиянием приращений вычисляется с помощью соответственно преобразованного модуля таким образом, как будто рассматриваемый материал является упругим. Для приращения упругой деформации материала мы можем записать обычным путем

$$\Delta \{\varepsilon_e\} = [D]^{-1} \{\Delta\sigma\}. \quad (\text{XII.9})$$

Принимая сначала гипотезу пластичности «общей деформации» из (XII.4), получаем

$$\Delta \{\varepsilon_p\} = C [D_0]^{-1} \{\Delta\sigma\}, \quad (\text{XII.10})$$

где C — постоянная пропорциональности, а $[D_0]$ — постоянная матрица (зависящая только от коэффициента Пуассона $\nu = \frac{1}{2}$).

Таким образом,

$$\Delta \{\varepsilon_e\} + \Delta \{\varepsilon_p\} = ([D]^{-1} + C [D_0]^{-1}) \Delta\sigma,$$

или

$$\Delta\sigma = ([D]^{-1} + C [D_0]^{-1})^{-1} \Delta(\{\varepsilon_e\} + \{\varepsilon_p\}). \quad (\text{XII.11})$$

Рассматривая только температурную деформацию в качестве начальной деформации, можно найти изменение напряжения упругим способом, где «упруго-пластическая» величина матрицы упругости, определяемая

$$[D_{ep}] = ([D]^{-1} + C [D_0]^{-1})^{-1}, \quad (\text{XII.12})$$

займет место матрицы упругости в традиционных вычислениях. Если теперь C станет очень большой величиной, пластические деформации будут почти полностью подавлять упругие деформации

ции. В пределе для идеального упруго-пластического материала с почти горизонтальным участком диаграммы «эффективное напряжение — деформация» мы получим

$$[D_{ep}] = \frac{1}{C} [D_0]. \quad (\text{XII.13})$$

В задачах плоской деформации и трехмерных задачах возникают трудности, так как $[D_0]$ становится неопределенной. Это объясняется тем, что материал почти несжимаем, поэтому необходимо использовать специальный метод решения, как и в соответствующем случае с упругими задачами (см. уравнение (III.5)). Если используются законы пластичности в приращениях, то уравнение (XII.8) должно быть записано в другой форме так, чтобы оно было представлено как функция приращения истинного напряжения. Из определения эффективного напряжения (XII.2), дифференцируя, получаем

$$\Delta \bar{\sigma} = [\Omega] \Delta \{\sigma\} = \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_x} \right. \\ \left. \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_y} \right] \Delta \{\sigma\}, \quad (\text{XII.14})$$

где различные члены матрицы $[\Omega]$ зависят от компонентов $\{\sigma\}$. Преобразуя далее, как указано в уравнениях (XII.10) — (XII.12), мы получим упруго-пластическую форму матрицы упругости $[D_{ep}]$, которая будет функцией напряжений. В этом случае, однако, окажется, что эта матрица не соответствует состоянию изотропии, и новая задача полного анизотропного состояния упругости должна решаться на каждом шаге приращений.

Этот метод аналогичен

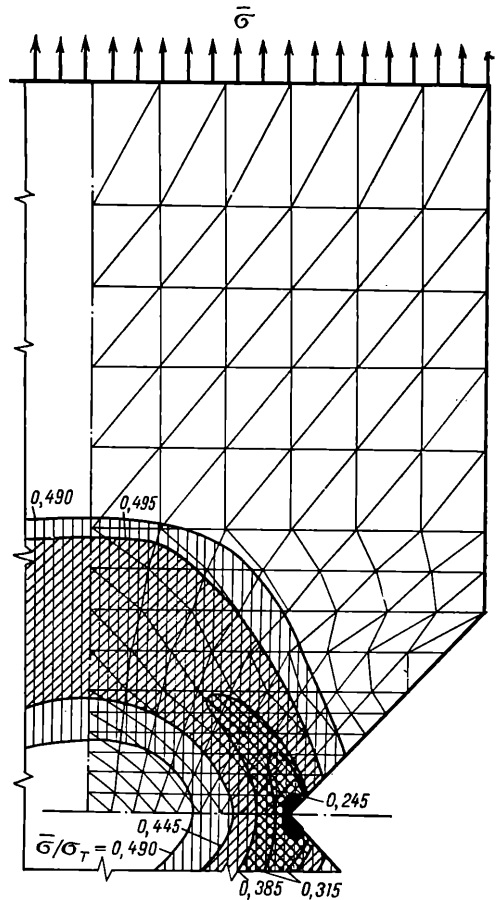


Рис. 95. Прогрессирующее пластическое течение зубчатого осесимметричного стержня (Malgouyres and King [9]). Вычисление с помощью метода приращения упругости. Материал с упрочнением. Зоны пластичности для различных величин $\bar{\sigma}/\sigma_T$ показаны штриховкой

методу, описанному Clough [1] для нелинейных упругих задач с постоянным коэффициентом Пуассона. Такой же подход использовался Swedlow et al. [7] при изучении распространения трещин. Общая формула, пригодная для определения любого пластического потенциала, дана Роре [8]. Она имеет много преимуществ, сходимости при использовании материалов с очень плоскими диаграммами связи «напряжение—деформация». В целом достаточно взять матрицу $[D]$ упруго-пластического состояния, соответствующую уровням начального напряжения в начале приращения. Для улучшения точности, однако, внутри интервала можно использовать итерацию, аналогичную той, которая приводилась при описании прямого подхода. Пользуясь этим методом, мы можем без затруднений сделать поправку на чисто упругое поведение в конкретном элементе во время разгрузки. Если на предыдущем шаге приращения произошло уменьшение деформации, матрица упругости $[D]$ вводится для данного шага и пластические деформации подавляются. Необходимо отметить, что в то время как метод, описанный в параграфе 76, дает решения лишь для одного нагружения, методы приращения в параграфах 77 и 78 дают представление о развитии пластического процесса при увеличении нагрузки, поэтому эти методы эффективны в тех случаях, когда необходимо полностью изучить поведение сооружения.

Применение другого метода показано в виде диаграммы на рис. 93, в. На рис. 95 даны результаты исследования материала с вырезом с помощью описанного здесь метода.

79. Эффекты ползучести

Для большинства материалов обнаруживается временная зависимость деформаций при постоянном уровне напряжения, даже в случае, если величины напряжения значительно ниже тех, при которых происходит пластическая деформация. Если известны законы, связывающие напряжения, деформации и время, то будет легко принципиально включить подобные эффекты ползучести в расчеты. Очевидно, в этом случае будет использоваться процедура с приращениями, а изменения деформации и нагрузки определяются в последовательные интервалы времени. Самым простым для применения будет метод, описанный в параграфе 77. Он приведет к сходимости в случае, если приращения деформаций ползучести в каждый интервал времени будут достаточно малы. Для того чтобы приспособить метод, описанный в параграфе 77, и включить деформации ползучести, необходимо записать уравнение (XII.3) для любого промежутка времени Δt

$$\Delta \{\epsilon\} = \Delta \{\epsilon_e\} + \Delta \{\epsilon_0\}, \quad (\text{XII.15})$$

где начальная деформация в этот промежуток будет

$$\Delta \{\epsilon_0\} = (\Delta \{\epsilon_0\} + \Delta \{\epsilon_p\} + \Delta \{\epsilon_e\}),$$

где $\Delta\{\epsilon_c\}$ — приращение деформации ползучести, которая происходит одновременно с другими изменениями деформации под влиянием температуры и пластичности.

Таким образом, приращения упругого напряжения снова вычисляются на каждом шаге для данных величин начальных деформаций.

Единственное отличие от пластической задачи заключается в определении приращения деформации ползучести. Здесь будет дано только общее изложение физических законов, управляющих ползучестью, поэтому для подробного рассмотрения этих вопросов отсылаем читателя к стандартному учебнику по данной теме [10].

При общем рассмотрении можно различать две категории ползучести. Первая категория проявляется в металлах, где имеется значительная нелинейность в зависимости деформации от напряжений. Вторая категория — это вязко-упругая ползучесть, свойственная пластикам, керамическим материалам и бетону. В этом случае деформации обычно являются линейными функциями напряжения, но значительно зависят от изменения нагружения во времени.

79.1. Деформация ползучести в металлах. Характерным свойством большинства законов, которые описывают деформацию ползучести в металлах, является то, что скорость деформации может быть единственно определена условиями в данный момент времени. Такие законы пренебрегают влиянием напряжений и деформаций в предыдущие моменты времени или учитывают их весьма неполно. Например, в так называемых теориях возрастного старения скорость деформации зависит от общего времени, прошедшего с того момента, как были приложены нагрузки хотя бы самой малой величины. Несколько более убедительная теория учитывает влияние общей деформации, суммированной перед рассматриваемым отрезком времени. Эта теория известна как теория деформационного старения*.

Для одноосного напряженного состояния

$$\frac{\partial \epsilon_c}{\partial t} = \varphi(\epsilon) \psi(t) f(\sigma). \quad (\text{XII.16})$$

Так как обычно принимается, что деформация ползучести так же как и пластическая деформация, не изменяет объема металла, мы можем обобщить эти уравнения таким же образом, как уравнение (XII.4). Поэтому мы можем опять записать связь между напряжением и деформацией как

$$\frac{d}{dt} \{\epsilon_c\} = [D_0]^{-1} \varphi(\bar{\epsilon}) \psi(t) f(\bar{\sigma}) \{\sigma\}. \quad (\text{XII.17})$$

В этом уравнении напряжения и деформации уравнения (XII.16) заменены эффективными напряжениями и деформациями, определенными уравнениями (XII.1) и (XII.2). Уравнение (XII.13) позво-

* Теория «упрочнения» (прим. ред.).

ляет легко определить приращение деформации ползучести в промежутке времени Δt в случае, если $\chi(t)$ будет взята как медленно изменяющаяся функция.

Теперь мы получаем

$$\Delta \{\varepsilon_c\} = [D_0]^{-1} \varphi_i(\bar{\varepsilon}) \psi_i(t) f(\bar{\sigma}) \Delta t \{\sigma\}, \quad (\text{XII.18})$$

где $\varphi(\bar{\varepsilon}_i)$ и $\psi_i(t)$ — средние величины, связанные с рассматриваемым промежутком времени.

Часто допускается, что возраст и деформация не влияют на ползучесть и что функция f имеет простую степенную форму. Тогда

$$\Delta \{\varepsilon_c\} = [D_0]^{-1} K \bar{\sigma}^n \Delta t \{\sigma\}, \quad (\text{XII.19})$$

где K и n — известные постоянные. Вычисление теперь упрощается. Показатель степени n для большинства металлических материалов изменяется от 2 до 8.

Если температура изменяется, то множитель K может зависеть от температуры. При введении в расчет такой зависимости не возникает трудностей.

79.2. Вязко-упругая ползучесть. Для многих материалов, таких, например, как пластики или бетон, влияние предыстории нагружения во времени на деформации гораздо более ощутимо, чем в металлах. Например, значительные изменения деформации (восстановление ползучести) могут продолжаться в течение долгого времени после того, как всякая нагрузка будет снята. Законы, управляющие поведением такой ползучести, линейны по отношению к напряжению, поэтому принципы суперпозиции сохраняют свою силу [11]. Законы напряжение — деформация вязко-упругой ползучести могут быть записаны в форме обычных уравнений упругости, но постоянные упругости будут заменены линейными, дифференциальными или интегральными операторами. Например, постоянная $1/E$ будет заменена оператором следующей формы:

$$1/E \rightarrow \int_0^t c(\tau, t - \tau, \theta) \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \tau} d\tau, \quad (\text{XII.20})$$

где c — функция ползучести, которая показывает изменение деформации ползучести во времени при постоянном единичном осевом напряжении.

Другие постоянные упругости могут быть заменены аналогичными интегральными операторами, поэтому мы можем записать для общей деформации ползучести

$$\{\varepsilon_c\} = [D_c]^{-1} \{\sigma\}, \quad (\text{XII.21})$$

где $[D_c]$ имеет ту же форму, что и матрица упругости, а постоянные заменены соответствующими операторами. Для таких материалов, как бетон, оператор, соответствующий коэффициенту Пуассона, остается постоянной величиной, и поэтому $[D_c]^{-1}$ может

быть записана в форме матрицы постоянных $[D_0]^{-1}$, умноженных на скалярный оператор.

Рассмотрим, например, плосконапряженное состояние. Связь «напряжение — деформация» принимает вид

$$\{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x, c \\ \varepsilon_y, c \\ \gamma_{xy}, c \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (\text{XII.22})$$

Так как ν есть постоянная, используя уравнение (XII.20), мы можем записать

$$\{\varepsilon_c\} = [D_0]^{-1} \int_0^t c(t, t - \tau, \theta) \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \tau} d\tau, \quad (\text{XII.23})$$

где

$$[D_0]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix},$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Если известно изменение напряжения во времени для любого элемента, величина $\{\varepsilon_c\}$ может быть найдена в любое время из выражения типа уравнения (XII.21) с помощью численного интегрирования.

Приращение деформации ползучести в конкретный промежуток времени определяется как

$$\Delta \{\varepsilon_c\} = \frac{d}{dt} \{\varepsilon_c\} \Delta t \quad (\text{XII.24})$$

и для случая плосконапряженного состояния принимает вид

$$\Delta \{\varepsilon_c\} = [D_0]^{-1} \int_0^t \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \tau} d\tau. \quad (\text{XII.25})$$

Материалы типа пластиков практически не проявляют вязкоупругой ползучести под влиянием гидростатического сжатия, но значительная ползучесть происходит в них в связи со сдвиговыми компонентами. Для таких материалов матрица, включающая коэффициент Пуассона, записывается при $\nu=1/2$, и снова необходимо учитывать только один оператор для расчета деформации ползучести (объемные деформации учитываются в упругой части расчета деформации). Снова можно использовать приращение деформации ползучести, вычисленное за предыдущий интервал времени. Интегралы, подобные тому, который встречается в уравнении (XII.23),

оцениваются суммарно. Например, при равных интервалах времени Δt

$$\begin{aligned} \Delta \{\epsilon_c\}_n &= [D_0]^{-1} \int_0^{n\Delta t} \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \tau} d\tau = \\ &= [D_0]^{-1} \sum_{m=0}^{m=n} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)_{\substack{t=n\Delta t \\ \tau=m\Delta t}} \Delta \{\sigma\}_m. \end{aligned} \quad (\text{XII.26})$$

Функция ползучести c может принимать разнообразные формы. Например, для стареющего бетона, подвергаемого температурным изменениям θ , предлагается следующая форма [12]:

$$c = \frac{1}{(\alpha_1 - \beta_1\theta)(\alpha_2 - \beta_2\theta)} c_0 [1 - \beta_0 \exp\{-\gamma_0(t - \tau)\}], \quad (\text{XII.27})$$

где α , β и т. д. — постоянные. Функции такого типа особенно часто встречаются, хотя в соответствующей литературе приводятся другие формы эмпирических отношений. Число и размер временных интервалов, необходимых для оптимальной сходимости, можно определить только после рассмотрения формы кривых ползучести. В целом шаги должны быть выбраны так, чтобы величины приращений деформации ползучести были незначительными относительно общей деформации в данный момент времени. В задачах ползучести металлов может случиться, что ползучесть происходит при весьма значительных скоростях для определенных уровней напряжения. В таких задачах этот метод не дает хорошей сходимости, поэтому необходимо использовать другой подход, аналогичный тому, который был описан в параграфе 78.

80. Особый подход к некоторым вязко-упругим задачам

Как уже отмечалось, деформации ползучести в вязко-упругих материалах имеют линейную зависимость от напряжений. Поэтому в общем для суммы деформаций упругости и ползучести мы можем записать

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_e\} + \{\epsilon_c\} = [D_{ec}]^{-1} \{\sigma\}, \quad (\text{XII.28})$$

где $[D_{ec}]$ — оператор, объединяющий эффекты упругости и вязко-упругого состояния.

Если тип материала таков, что матрица $[D_{ec}]$ может быть записана как

$$[D_{ec}] = [D]f, \quad (\text{XII.29})$$

где $[D]$ — обычная матрица постоянных для каждого элемента, а f — скалярный оператор (типа, данного в уравнении (XII.20))

и если, наконец, f не изменяется от элемента к элементу, то при расчете можно ввести значительные упрощения.

Например, если по условию задачи только внешние нагрузки влияют на напряжения, то, так как f есть общий коэффициент жесткости всех элементов, после окончательного суммирования всех уравнений из уравнения (XII.12) мы получим для всей системы

$$[K_0] f \{\delta\} = \{R\}$$

или

$$[K_0] \{\delta\} = f^{-1} \{R\}. \quad (\text{XII.30})$$

В этом уравнении матрица $[K_0]$ построена для жесткости элемента, имеющего свойства, выраженные матрицей $[D]$ для каждого элемента, f^{-1} есть оператор обращения для f и соответствует оператору функции ползучести в уравнении (XII.20). Правая часть уравнения (XII.30) может быть решена без помощи пошаговых вычислений, что значительно экономит вычислительное время.

Напряжения, соответствующие найденным смещениям, определяем с помощью матрицы напряжения на основании уравнения (XII.28). Сразу же становится очевидно, что в вычислении появятся произведения f и f^{-1} , которые просто равны единице, поэтому напряжения не зависят от времени. Действительно, они будут идентичны напряжениям, полученным в эквивалентной упругой задаче, где они просто определяются как

$$[K_0] \{\delta\} = \{R\}. \quad (\text{XII.31})$$

Результат хорошо известен в теории вязко-упругости [11, 13]. Таким же образом рассматриваются задачи температурных деформаций или любые задачи, напряженное состояние в которых вызывается заданным смещением. Здесь тоже возможны значительные упрощения [13].

На практике эти упрощения допустимы только для таких материалов, у которых коэффициент Пуассона может быть принят за постоянную величину, и отсутствие временного оператора ограничивает их общность. Кроме того, поведение всех элементов должно быть одинаковым, так как зависимость свойств от температуры трудно учесть. Для более сложных линейных вязко-упругих задач можно разрабатывать другие методы решения, но это не входит в задачу данной главы.

81. Нелинейность, возникающая в результате больших смещений

Важные случаи применения метода конечных элементов в изучении задач больших смещений будут здесь рассмотрены лишь вкратце. Целесообразно произвести некоторую классификацию задач. Первое разделение задач зависит от того, остаются ли деформации в отдельных элементах небольшими или нужно рас-

смагивать нелинейные свойства деформаций внутри каждого элемента.

Второе разделение зависит от метода решения. Очевидно, и в этом случае можно использовать прямой итерационный метод, который даст решение для конкретной системы нагрузки. С другой стороны, можно использовать процесс приращений, позволяющий изучить поведение всей системы в целом, при всех нагрузках.

81.1. Элементы, подвергаемые незначительной деформации. В большинстве задач с большой величиной смещения деформации материала невелики. Большие деформации встречаются лишь изредка во время пластической деформации обычных материалов или в резиновых материалах, редко используемых в инженерных сооружениях. Типичным примером больших смещений, где все деформации находятся в границах упругости материала и поэтому невелики, являются задачи о прогибах плит и колонн небольшого сечения за пределом устойчивости, классическая задача «эластика» и большие деформации тонких оболочек.

Прямой итерационный метод. Сразу же возникает мысль использовать очень простой метод. Деформации линейного упругого состояния сначала вычисляются в сооружении обычным путем. На этой начальной стадии координаты узловой точки, определяющей элемент, фиксировались в пространстве. Однако, после того как произошла деформация, координаты узлов каждого элемента были изменены с учетом соответствующих смещений каждого узла. Теперь можно перейти ко второй стадии вычислений и снова определить свойства элемента, на этот раз на основе новых координат. В результате второго шага мы получаем улучшенные данные смещений, полностью повторяя процедуру вычисления и включив в нее вновь вычисленную элементарную жесткость.

Процесс можно повторять до тех пор, пока не будут получены устойчивые величины смещений. Очевидно, этот метод трудоемок, так как полная процедура решения должна повторяться на каждом шаге. Кроме того, одновременно может включаться только один вектор нагрузки (или начальный вектор деформации в случае температурных задач).

К достоинствам метода относится то, что сходимость наступает довольно быстро. Этот метод имеет отчетливое сходство с методом, описанным в параграфе 76 при рассмотрении нелинейных свойств материала.

Метод приращений и матрица «геометрической» жесткости. Изменения в оценке матрицы жесткости элемента при введении новых координат, определяемых прибавлением соответствующих смещений, очевидно, объясняется значительным движением только всего элемента. Так как деформации внутри элемента невелики и все линейные соотношения сохраняются, жесткость, отнесенная к локальной системе координат, которая движется вместе с элементом, остается постоянной. Такую движущуюся систему координат можно видеть в плосконапря-

женном элементе на рис. 96. При этом допускается, что ось x' всегда должна проходить через узлы i и j . Так как предполагается, что элемент должен вести себя линейно, его матрица жесткости относительно координат x' и y' всегда будет одинаковой величины, например $[k']^e$.

Для того чтобы преобразовать силы и смещения из системы x' и y' в систему $x-y$, необходимо воспользоваться матрицей преобразования направляющих косинусов, определяемой единственно с помощью угла α . Таким образом, силы и смещения в системе $x-y$, или главной, получаем с помощью следующих преобразований:

$$\begin{cases} \{F'\}^e = [T] \{F\}^e \\ \{\delta'\}^e = [T] \{\delta\}^e \end{cases} \quad (\text{XII.32})$$

С помощью правил, введенных в главе I (уравнение (I.16)), матрица жесткости элемента, выраженного в главных координатах, принимает вид

$$[k]^e = [T]^T [k']^e [T]. \quad (\text{XII.33})$$

Матрица преобразования, зависящая от направления угла элемента α , будет теперь зависеть от смещений элемента. Зависимость $[T]$ в функции от $\{\delta\}^e$ часто будет носить линейный характер, как и в обсуждаемом случае.

Рассмотрим теперь задачи больших деформаций с помощью метода приращения.

На определенной ступени n процесса наступает положение равновесия и происходит изменение внешних нагрузок $\Delta\{R_{n+1}\}$.

Это вызывает изменение смещения $\Delta\{\delta\}_{n+1}$. Начальное равновесие элемента будет нарушено по двум причинам. Во-первых, произойдут дополнительные деформации, в результате чего появятся соответствующие узловы силы. Это можно выразить следующим образом:

$$\Delta\{F\}_{n+1}^e \doteq [k^{n+1}]^e \Delta\{\delta\}_{n+1}^e = [T_n + \Delta T]^T [k']^e [T_n + \Delta T] \{\delta\}_{n+1}^e, \quad (\text{XII.34})$$

где ΔT — приращение, полученное в матрице преобразования под воздействием дополнительных смещений.

Второе изменение происходит потому, что изменяется направление первоначальных сил, которые находились ранее в состоянии равновесия. В результате появляются дополнительные силы, равные

$$\Delta\{F_g\}_{n+1}^e = [T_n + \Delta T]^T \{F'\}_n^e - [T_n]^T \{F'\}_n^e = [\Delta T]_{n+1}^T \{F'\}_n^e. \quad (\text{XII.35})$$

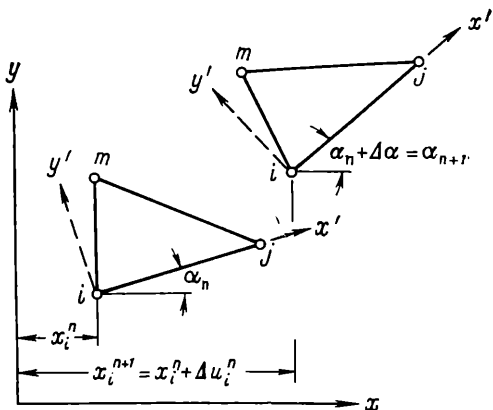


Рис. 96. Большие деформации в фиксированной и движущейся системах координат

Но так как $[T]$ есть функция смещений, для небольшого приращения мы можем записать

$$[\Delta T]_{n+1}^T = \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} [T]_n \Delta \{\delta\}_{n+1}^e. \quad (\text{XII.36})$$

Таким образом, уравнение (XII.35) принимает вид

$$\Delta \{F_g\}_{n+1}^e = [k_g^n] \Delta \{\delta\}_{n+1}^e, \quad (\text{XII.37})$$

где

$$[k_g^n] = \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} [T]_n \{F'\}_n^e$$

может рассматриваться как геометрическая жесткость. Если $[T]$ есть линейная функция смещений, $[k_g]$ будет фактически постоянной матрицей, не изменяющейся в зависимости от положения.

Чтобы устранить нелинейность в уравнении (XII.34), мы можем, не допуская серьезной ошибки, записать вместо $[T_n + \Delta T]$ просто $[T]_n$, в случае если шаги невелики.

Таким образом, изменение внутренних сил элемента за определенное приращение может быть представлено как

$$\{\Delta F\}_{n+1}^e + \Delta \{F_g\}_{n+1}^e = ([k^n] + [k_g^n]) \Delta \{\delta\}_{n+1}^e. \quad (\text{XII.38})$$

Решение для суммы всех элементов производится обычным путем, как будто бы жесткость элемента просто была суммой $[k^n]$ и $[k_g^n]$. Ясно, что $[k^n]$ нужно отдельно вычислять на каждом шаге из матрицы преобразования $[T]$ с помощью уравнения (XII.33).

Включение первоначальных деформаций, таких как деформации под влиянием температуры, не представляет трудностей. Этот шаговый метод был впервые применен Аргирисом [14, 15] и успешно использован для изучения больших деформаций, доходящих до точек и переходящих их «sharp through» (прошелкивание таких сооружений, как арки) [15].

Преимущества метода приращений в изучении задач с постепенно увеличивающейся нагрузкой очевидны. Для одной данной нагрузки, однако, удобнее применять менее сложный прямой метод, который мы уже описывали и который можно вывести из стандартной формулы малых смещений при минимальных дополнительных усилиях.

81.2 Большая деформация в элементах. Если в элементе происходят относительно большие деформации, то их отношение к узловым смещениям теряет линейный характер, что приводит к дальнейшему усложнению задачи. Подобный пример уже приводился в задаче с плитами в главе XI, где рассматривалась взаимосвязь между силами в плане и изгибающими силами. В качестве других примеров можно привести резиновые материалы, деформации которых в силу их величины невозможно определить линейно. В подобных случаях мы можем линеаризировать условия внутри элемента, допуская, что изменение определенных напряже-

ний не происходит во время приращения. Это делалось при решении задачи изгиба плит, где компонент в плане рассматривался во время изгиба неизменным. Как отмечалось, это приведет к появлению дополнительных узловых сил даже при подвижной системе координат. Для того чтобы ввести результат этой нелинейности, необходимо просто включить подобные силы в процесс, который мы уже рассматривали при решении задач с большой деформацией.

82. Решение задач устойчивости методом больших деформаций

При рассмотрении продольной устойчивости при изгибе таких сооружений, как стойки или плиты с нагрузкой в плане, можно допустить, что в каждом элементе происходят лишь очень небольшие деформации. Это означает, что взаимодействием между изгибом и силами в плане внутри элемента можно пренебречь и что местного продольного изгиба не будет допущено.

При пользовании методом приращений начальная неустойчивость системы будет выражена на первом шаге.

Если в уравнении (XII. 38) принять $n=0$ и производить объединение элементов с помощью обычных правил, то при отсутствии внешних сил мы получим

$$([K^0] + [K_g^0]) \Delta \{\delta\} = 0. \quad (\text{XII.39})$$

Теперь в задаче плит $[K^0]$ будет обычной матрицей жесткости изгиба; $[K_g^0]$, однако, зависит от величины сил в плане.

Вводя масштабный коэффициент λ и вычисляя для единичного значения $[K_g^0]$, мы можем вновь записать уравнение (XII. 35) как

$$([K^0] + \lambda [K_g^0]) \Delta \{\delta\} = 0, \quad (\text{XII.40})$$

которое является типичным для задачи на собственные значения, рассмотренной в главе XI. Очевидно, пренебрежение эффектом местного продольного изгиба приведет к более низким результатам, чем те, которые мы получили бы методом, описанным в главе XI. Конечно, возможно включить эффекты больших смещений в расчеты внутри элемента, как описывалось в последнем разделе. При этом мы увидим, что формулировка снова будет аналогична формулировке, данной в главе XI.

83. Заключительные замечания

Бесконечное разнообразие практических задач, встречающихся в строительной механике при рассмотрении проблем нелинейности, может лишь упоминаться в самых общих чертах в данной работе. Изложение основных методов подхода, которое мы даем в этой книге, позволяет без особых трудностей выработать дальнейшие принципы рассмотрения разнообразных специальных слу-

чаев. Для этих специальных случаев необходимо исследовать вопросы сходимости и единственности, однако почти всегда при этом можно использовать один из методов, описанных здесь. В отдельных случаях могут быть разработаны специальные методы. Например, задачи с «прошелкиванием» [15] и другие примеры потери устойчивости при продольном изгибе часто усложняются тем, что жесткость конструкции уменьшается при больших смещениях. Действительно, после такого уменьшения в некоторых случаях происходит значительное увеличение жесткости, ведущее к появлению двух возможных положений равновесия или более при данной нагрузке. В таких случаях вместо задания приращения нагрузки нужно задать одно или смещение более и дать им приращение. Затем находим соответствующие нагрузки на каждой стадии смещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. W. Clough, The Finite element method in structural mechanics, in *Stress Analysis*, ed O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
2. E. L. Wilson, Finite element analysis of two-dimensional structures, *Struct. Eng. Lab. Rep.*, No. 63—2 Calif. Univ. Berkeley, June 1963.
3. R. Watson, M. Sc. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1966.
4. R. H. Gallagher, J. Padlog, and P. P. Bijlaard, *Stress Analysis of Heated complex shapes*, A.R.S.J., pp. 700—707; May 1962.
5. J. H. Argyris, Elasto-plastic Matrix displacement analysis of three — dimensional continua, *J. roy. aero. Soc.*, 69, pp. 633—5, 1965.
6. D. C. Drucker, Basic concepts of plasticity, in *Handbook of Engineering Mechanics*, ed. W. Flugge, McGraw-Hill, 1962.
7. J. L. Swedlow, M. L. Williams and W. H. Yang, Elasto-plastic stresses and strains in cracked plates, *Galcit-Report SM*, 65—14, Calif. Institute of Technology, 1965.
8. G. G. Pope, The application of the matrix-displacement method in plane elasto-plastic problems methods, *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
9. P. V. Marcal and I. P. King, Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method (to be published).
10. I. Finnie and W. R. Heller, *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill, 1959.
11. E. H. Lee, Viscoelasticity, in *Handbook of Engineering Mechanics*, ed. W. Flugge, McGraw-Hill, 1962.
12. M. A. Zadoian, The creep of concrete plates at high temperature, *Izvest. Akad. Nauk USSR (Mech. and Machines)*, 4, p. 129, 1961.
13. O. C. Zienkiewicz, Analysis of Visco-elastic behaviour of concrete structures with particular reference to thermal stress, *Proc. Amer. Concr. Inst.*, 58, p. 383, 1961.
14. J. H. Argyris, S. Kelsey, and H. Kamel, *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGARD-ograph 72, Pergamon Press, 1963.
15. J. H. Argyris, Continua and Discontinua, *Proc. Conf. Matrix methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Technology, Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

84. Вступление

Надеемся, что к этому моменту читатель убедился, что метод конечных элементов может использоваться при решении почти безграничного числа практических задач. Однако при рассмотрении примеров, приводимых до сих пор, мы предполагали, что в каждой отдельной задаче встречаются элементы одного вида. При всей очевидности этого факта напомним все же, что элементы самого различного характера могут легко комбинироваться в каждом отдельном случае. Это еще больше расширяет возможности применения данного метода. Так, в однородных задачах элементы разной формы могут использоваться одновременно для улучшения точности решения при том же числе неизвестных. Например, задачи плоского напряжения могут решаться с помощью четырехугольных элементов, на которые разбиваются участки с однородным напряжением, а также треугольных элементов на участках, близких к границам, где их использование объясняется характером очертания, или на участках концентрации напряжения, где требуется уменьшение размера элемента. Такие же сочетания возможны в других задачах, например, в задаче изгиба плит и т. д.

Еще более важно, что при решении неоднородных задач можно легко комбинировать элементы. Не возникает трудности при одновременном «объединении» элементов в плосконапряженном состоянии для балки и плиты при рассмотрении типичных сооружений, встречающихся на практике. Необходимым критерием этого объединения является тот факт, что одно и то же число степеней свободы может быть обеспечено в узлах разных типов элементов. Так как общие правила объединения (см. главу I) одинаковы, независимо от числа узлов элемента, то при условии соблюдения вышеизложенного правила можно снова использовать ту же программу объединения элементов и решения.

Легкость этого метода позволила разработать стандартные общие вычислительные программы, которыми можно пользоваться при решении большого числа однородных и неоднородных задач.

Необходимые характеристики элемента зафиксированы на входе ЭВМ, а вычисление различных видов жесткости элемента производится с помощью соответствующих подпрограмм.

В настоящей главе будут приведены три типичных примера. Другие примеры решаются по этому же образцу.

85. Плита, окаймленная балками

Типичный случай такой плиты приведен на рис. 97, где также показана разбивка на элементы. Для объединения элементов тре-

буется только получить матрицу жесткости типичного элемента балки ij с помощью матриц жесткости, уже полученных (глава VII) для четырехугольных элементов плиты.

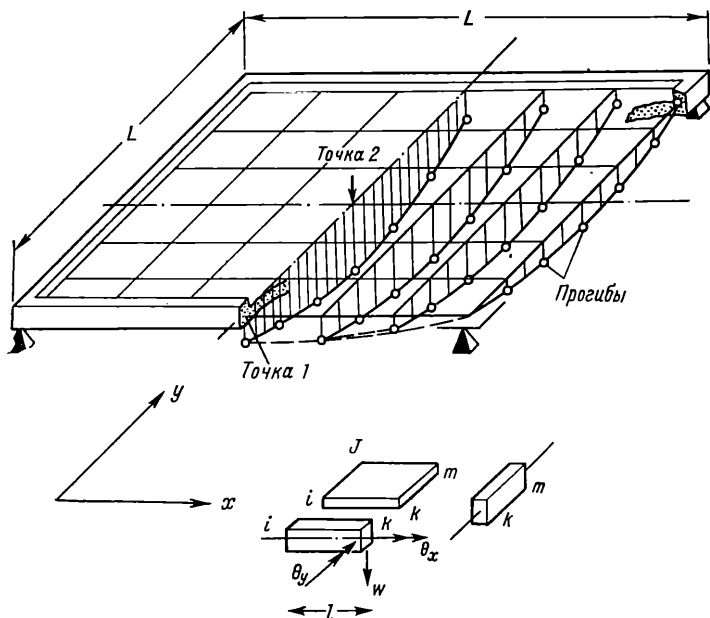


Рис. 97. Квадратная плита, окаймленная балками, под действием равномерно распределенной нагрузки q

Для элемента балки ik , направленного вдоль оси x и имеющего три степени свободы, с помощью классического метода сопротивления материалов* можно получить следующую матрицу:

$$\{F\}^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l & -12 & 0 & 6l \\ 0 & \gamma l^2 & 0 & 0 & -\gamma l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 4l^2 & -6 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & -6l & 12 & 0 & -6l \\ 0 & -\gamma l^2 & 0 & 0 & \gamma l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x i} \\ \theta_{y i} \\ w_k \\ \theta_{x k} \\ \theta_{y k} \end{Bmatrix}, \quad (\text{XIII.1})$$

где l — длина балки; EI — жесткость элемента при изгибе; $\gamma = \frac{GI}{EI}$ (GI — жесткость при кручении).

* Или с помощью использования кубической функции формы для w при линейном изменении θ_x .

В данном примере предполагалось, что балки не имели жесткости при кручении с тем, чтобы можно было произвести сравнение с результатами, полученными аналитическим путем [1].

Взяв другие постоянные, указанные на рис. 97, можно установить общий характер смещений.

В табл. 10 [2] дано сравнение с приближенными аналитическими результатами.

Таблица 10

	Точка 1		Точка 2	
	ω	M_x	ω	M_x
Решение методом конечных элементов $\nu=0,3$	0,0037	0,0332	0,0087	0,0611
Тимошенко [1] $\nu=0,25$	не получено		0,0087	0,0601
Множитель	qL^4/D	qL^4	qL^4/D	qL^4

Очевидно, что и более сложные задачи с любой формой плиты могут решаться с помощью треугольных плоских элементов. Например, недавно этот метод применялся при расчете косых мостов с ребрами-балками.

86. Плиты на упругом основании

Эта задача, имеющая практическое значение, не представляет особых трудностей. Если разбить плиту на отдельные элементы, то основание можно рассматривать как один дополнительный элемент с большим числом узловых точек, которые необходимо рассматривать совместно с ней, как показано на рис. 98. Для просто-

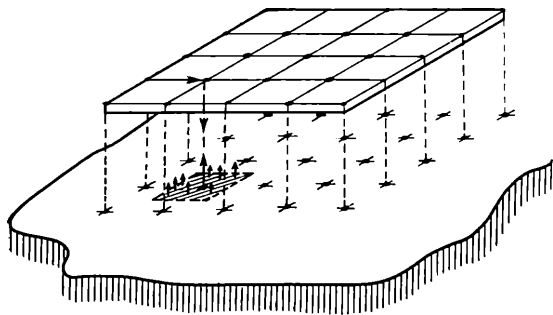


Рис. 98. Плита на упругом основании. Основание представлено дополнительным связующим элементом

ты допустим, что только вертикальные силы передаются от плиты к основанию. Так как матрицу жесткости основания необходимо записать в такой форме, которая содержала бы то же число степеней свободы, что и узлы плиты (т. е. три), можно допустить, что в узлах основания не будет приложено концентрированных пар, другими словами, что коэффициенты жесткости матрицы основа-

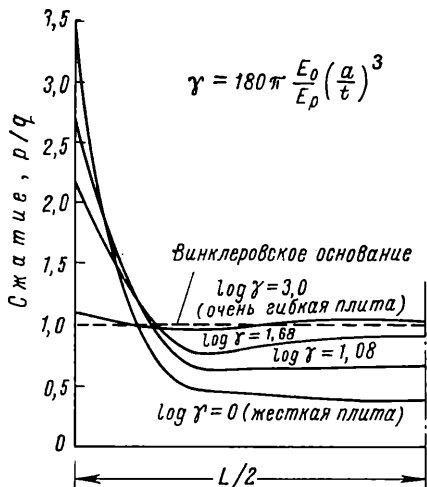


Рис. 99. Контактные давления по центральной прямой квадратной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки q , приложенной к изотропному основанию: $a=L/6$ (L — длина стороны); E_0 — модуль упругости основания; E_p — модуль упругости плиты; t — толщина плиты; $(1-\nu_p^2)/(1-\nu_0^2)=1$

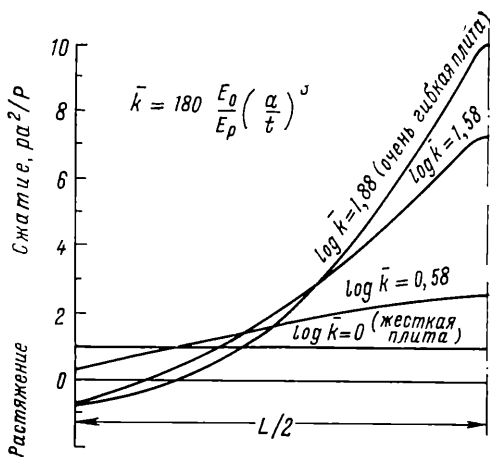


Рис. 100. Плита, приведенная на рис. 99, под действием сосредоточенной нагрузки P , приложенной в центре. (основание Винклера)

ния, соответствующие вращениям, будут равны нулю. Если основание будет представлено идеально упругим полупространством, можно использовать классическое решение Буссинеска для получения матрицы жесткости основания, производя нагружение элементарных площадей, которые показаны на рис. 98 штрихами, и вычисляя средние деформации всех входящих в эти участки точек. Очевидно, матрица жесткости основания такой сплошной среды будет полной, включающей внутреннюю связь между всеми узлами.

Простой пример так называемого винклеровского основания, обычно используемого вследствие простоты расчета, предполагает, что каждая точка присоединена к отдельной пружине. В этом случае матрица основания будет иметь простую диагональную форму.

Определение соответствующих матриц и решение типичных за-

дач дано у Зенкевича и Чанга [3]. На рис. 99 и 100 даны некоторые характерные результаты для квадратных плит, находящихся под действием равномерной и сосредоточенной нагрузок.

87. Колебание конструкций, погруженных в жидкость

Решение этой задачи представляет определенные трудности. При колебании погруженных в жидкость конструкций давления возникают на его поверхности вследствие взаимодействия с жидкостью.

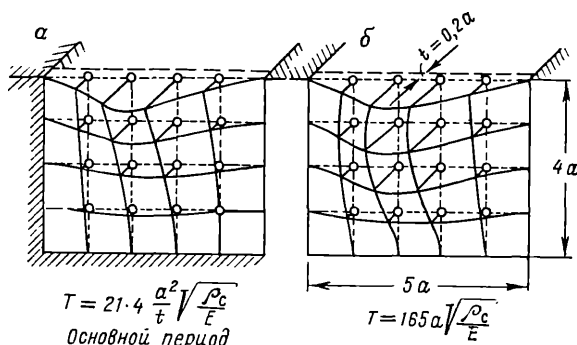


Рис. 101. Колебание встроенной бетонной вододерживающей стенки $\nu=0,2$:

a — без воды; b — с водой

$$T = 21.4 \frac{a^2}{t} \sqrt{\frac{R_c}{E}}$$

Основной период

$$T = 165a \sqrt{\frac{R_c}{E}}$$

В параграфе 64.2 было показано, что, решая задачу поля, можно получить матрицу влияния, устанавливающую связь давления в различных точках движущейся поверхности с нормальным ускорением в этих точках при условии, что жидкость несжимаема.

Если рассматриваемые точки движущейся поверхности совпадают с узлами колеблющихся конструкций, то, умножая на площадь, относящуюся к одному конкретному узлу, мы можем установить связь сил внешнего давления с ускорениями в узлах.

Таким образом, мы для конструкционной системы (испытывающей вынужденные незатухающие колебания) будем иметь

$$[K] \{\delta\} + [M] \{\ddot{\delta}\} = \{R_p\}, \quad (\text{XIII.2})$$

где $\{R_p\}$ — вектор нагрузки внешнего давления, который определяется из матрицы влияния в виде

$$\{R_p\} = -[M_p] \{\ddot{\delta}\}. \quad (\text{XIII.3})$$

Соединяя уравнения (XII. 2) и (XIII. 3), получаем новое уравнение свободного колебания

$$[K] \{\delta\} + ([M] + [M_p]) \{\ddot{\delta}\} = 0. \quad (\text{XIII.4})$$

В этом уравнении матрица масс была добавлена посредством матрицы влияния $[M_p]$ с тем, чтобы учесть эффект давления жидкости.

При решении новой задачи колебаний, которая может рассматриваться в точности таким же образом, как это делалось в главе XI, не возникает трудностей. В целом матрица $[M_p]$ будет пол-

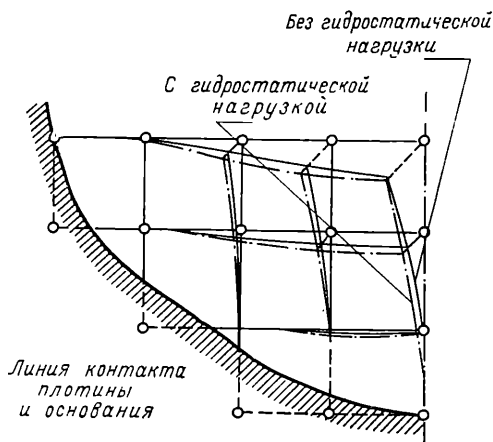


Рис. 102. Представление арочной плотины как плиты переменной толщины. Основная форма и основной период:

$T=0,475$ с без гидростатической нагрузки; $T=0,834$ с гидростатической нагрузкой

ной матрицей, связывающей все узлы системы, а конечные матрицы не будут представлены в узкополосной форме.

Некоторые примеры применения этого метода к задачам колебаний погруженных в жидкость плит даны у Зенкевича и др. [4], откуда взяты рис. 101 и 102. Вторая задача рассматривает реальную арочную плотину как плоскую плиту, причем результаты хорошо согласуются с частотами, полученными при испытании действительной конструкции. Очевидны возможности расширения метода на другие сооружения, например погруженные оболочки или твердые тела. Недавно было получено решение для арочной плотины типа оболочки, причем результаты, проверенные при испытании на модели, показали, что частоты и собственные формы были определены точно [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Timoshenko and S. Woinowsky Krieger, Theory of Plates and Shells 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
2. O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Inst. Civ. Eng., 28, pp. 471—88, 1964.
3. Y. K. Cheung and O. C. Zienkiewicz, Plates and tanks on elastic foundation — an application of finite element method, Int. J. Solids and Structures, 1, pp. 451—61, 1965.
4. O. C. Zienkiewicz, B. Irons, and B. Nath, Natural frequencies of complex free submerged structures by the finite element method, Proc. of Conf. on Vibrations in Civil Engineering, Inst. Civ. Eng. London, April 1965.
5. P. R. Taylor, The response of arch dams to earthquakes, Ph. D. thesis, Univ. of Bristol, 1965.

Матричная алгебра

Предвзятое отношение к матричной алгебре объясняется, вероятно, тем, что книги на эту тему составлены так, что читатель должен переработать слишком много новой информации за один раз. Можно убедиться, что для чтения этой книги и проведения необходимых вычислений требуется ограниченное знание основных положений.

Определение матрицы

Линейное соотношение между системой переменных x и b

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \quad (A.I.1)$$

может быть записано сокращенно как

$$[A] \{x\} = \{b\}, \quad (A.I.1a)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad (A.I.2)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Верхняя запись содержит сразу и определение матрицы и процесс умножения. Матрицы определяются как массивы чисел типа, показанного в (A.I.2). Отдельная форма, содержащая столбец чисел, часто рассматривается как вектор или матрица-столбец. Умножение матрицы посредством вектора-столбца определяется с помощью эквивалентности из (A.I.1.) и (A.I.1a).

Если существует другое соотношение, использующее те же постоянные, но другой набор x и b , которое можно записать как

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 &= b'_1; \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 &= b'_2; \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 &= b'_3, \end{aligned} \quad (A.I.3)$$

то мы можем представить

$$[A] [X] = [B], \quad (A.I.4)$$

где

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 & x'_1 \\ x_2 & x'_2 \\ x_3 & x'_3 \\ x_4 & x'_4 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix}, \quad (A.I.5)$$

включающее обе записи (A.1.2) и (A.1.3), которые даны одновременно в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & a_{11}x'_1 + & \\ a_{21}x_1 + & a_{21}x'_1 + & \\ a_{31}x_1 + & a_{31}x'_1 + & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \\ b_3 & b'_3 \end{bmatrix}. \quad (A.I.4a)$$

Можно убедиться, что матрицы будут равными только в случае, если равны отдельные члены.

Умножение полных матриц определено выше, и, очевидно, оно имеет значение только в том случае, если число столбцов в $[A]$ равно числу в $[X]$ для соотношения типа (A.1.4). Одно свойство, которое определяет умножение матриц, заключается в том, что в основном

$$[A][X] \neq [X][A], \quad (A.I.5a)$$

т. е. умножение матриц не обладает свойством коммутативности, как в обычной алгебре.

Сложение или вычитание матриц

При сложении отношений типа (A.1.1) и (A.1.2) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(x_1 + x'_1) + a_{12}(x_2 + x'_2) + a_{13}(x_3 + x'_3) + a_{14}(x_4 + x'_4) &= b_1 + b'_1 \\ a_{21}(x_1 + x'_1) + a_{22}(x_2 + x'_2) + a_{23}(x_3 + x'_3) + a_{24}(x_4 + x'_4) &= b_2 + b'_2 \\ a_{31}(x_1 + x'_1) + a_{32}(x_2 + x'_2) + a_{33}(x_3 + x'_3) + a_{34}(x_4 + x'_4) &= b_3 + b'_3 \end{aligned} \right\} \quad (A.I.6)$$

что также вытекает из

$$[A]\{x\} + [A]\{x'\} = [A]\{x + x'\} = \{b\} + \{b'\} = \{b + b'\},$$

если мы определяем сложение матриц с помощью простого сложения отдельных членов массива. Очевидно, это можно получить лишь в случае, если матрицы будут одной размерности, например,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix},$$

или

$$[A] + [B] = [C] \quad (A.I.7)$$

подразумевает, что каждый член C равен сумме соответствующих членов $[A]$ и $[B]$.

Вычитание следует тем же правилам.

Транспонирование матрицы

Это определение означает перегруппировку чисел массива следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (A.I.8)$$

и будет, как показано, обозначаться значком T .

Его использование не кажется сразу очевидным, однако будет объяснено дальше и будет рассматриваться как простая заданная операция.

Обращение матрицы.

Если в соотношении (A.1.1a) матрица $[A]$ будет квадратной, т. е. она представлена коэффициентом системы уравнений типа (A.1.1), равных числу неизвестных $\{x\}$, тогда в общем случае можно найти ее решение для неизвестных $\{x\}$ в функции известных коэффициентов $\{b\}$.

Это решение можно записать как

$$\{x\} = [A]^{-1} \{b\}, \quad (A.I.9)$$

где матрица $[A]^{-1}$ есть обращение квадратной матрицы $[A]$.

$[A]^{-1}$ будет тоже квадратной и той же размерности, что и $[A]$.

Мы можем получить (A.I.9), умножив с обеих сторон (A.I.1a) на $[A]^{-1}$, и отсюда

$$[A]^{-1} [A] = [I] = [A] [A]^{-1}, \quad (A.I.10)$$

где $[I]$ есть единичная матрица, имеющая нули, кроме диагонали, и единицу в каждом элементе на диагонали. Если уравнения сингулярны и не имеют решения, то обращение невозможно.

Сумма произведений

В задачах механики мы часто сталкиваемся с рядом таких величин, как, например, силы, которые могут быть представлены как вектор матрицы

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}. \quad (A.I.11)$$

Они, в свою очередь, часто связаны с тем же числом смещений, какое представлено другим вектором, например

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix}. \quad (A.I.12)$$

Известно, что работа может быть представлена как сумма произведений сил и смещений

$$W = \sum F_n \delta_n.$$

Ясно, что в данном случае можно произвести транспонирование, так как по первому правилу матрицы мы можем записать

$$W = [F_1, F_2, \dots, F_n] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \{F\}^T \{\delta\} \equiv \{\delta\}^T \{F\}. \quad (A.I.13)$$

Это обстоятельство часто используется в данной книге.

Транспонирование произведения

Часто приходится производить транспонирование произведения матриц. Читатель может сам убедиться из предыдущих определений, что

$$([A] [B])^T = [B]^T [A]^T. \quad (A.I.14)$$

Симметричные матрицы

В задачах строительной механики часто встречаются симметричные матрицы. Если член матрицы $[A]$ обозначим как a_{ij} , то для симметричной матрицы $a_{ij} = a_{ji}$. Можно показать, что обращение симметричной матрицы всегда симметрично.

Расчленение

Легко убедиться, что произведение матрицы

$$[A] [B],$$

где, например,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}.$$

может быть получено разбиением каждой матрицы на подматрицы, обозначенные пунктирными линиями, применяя правила матричного умножения сначала к каждой из этих подматриц так, как будто они являются скаляром, а затем произведя дальнейшие умножения обычным путем. Так, если мы запишем

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

то

$$[A][B] = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix}$$

при дальнейшем умножении будет представлять полное произведение. Важной стороной разбивки является то, что размер подразбивки должен быть таков, чтобы произведение A_1B_1 имело смысл, т.е. чтобы число столбцов в A_{11} было равно числу строк в B_1 и т.д.

Если представленное выше определение справедливо, то все дальнейшие действия могут производиться с расчлененными матрицами, причем каждый участок разбивки рассматривается как скалярный.

Необходимо отметить, что любая матрица может быть умножена на скаляр (число). В этом случае равенство столбцов и строк больше не является необходимым условием.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основные уравнения главы II

$$2.1 \quad \{\delta\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m] \left\{ \begin{array}{c} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{array} \right\}$$

$$2.2 \quad \{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}^e$$

$$2.3 \quad \{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$$

$$2.9 \quad \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ \cdot \end{Bmatrix} = [k]^e \{\delta\}^e - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol}) - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol})$$

$$2.10 \quad [k] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \quad \{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol})$$

$$\{F\}_e = - \int [N]^T \{p\} d(\text{vol})$$

$$2.15 \quad \{\sigma\} = [D] [B] \{\delta\}^e - [D] \{\varepsilon_0\}$$

$$2.16 \quad [S]^e = [D] [B]$$

$$2.17 \quad \{\sigma_{\varepsilon_0}\}^e = - [D] \{\varepsilon_0\}$$

Некоторые формулы интегрирования для треугольника (см. рис. 4)

Пусть треугольник определяется в плоскости $x-y$ с помощью трех точек (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_m, y_m) , причем начало координат принимается в точке центра тяжести, т. е.

$$\frac{x_i + x_j + x_m}{3} = \frac{y_i + y_j + y_m}{3} = 0.$$

Тогда, интегрируя по площади треугольника, получим

$$\begin{aligned} \int x \, dx \, dy &= \int y \, dx \, dy = 0; \\ \int dx \, dy &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1x_i & 1y_i \\ 1x_j & 1y_j \\ 1x_m & 1y_m \end{vmatrix} = \Delta = \text{площадь треугольника}; \\ \int x^2 \, dx \, dy &= \frac{\Delta}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2); \\ \int y^2 \, dx \, dy &= \frac{\Delta}{12} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2); \\ \int xy \, dx \, dy &= \frac{\Delta}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Некоторые формулы интегрирования для тетраэдра (см. рис. 35)

Пусть тетраэдр определяется в системе координат (x, y, z) с помощью четырех точек (x_i, y_i, z_i) , (x_j, y_j, z_j) , (x_m, y_m, z_m) , (x_p, y_p, z_p) с началом координат в центре тяжести, т. е.

$$\frac{x_i + x_j + x_m + x_p}{4} = \frac{y_i + y_j + y_m + y_p}{4} = \frac{z_i + z_j + z_m + z_p}{4} = 0$$

Затем, интегрируя по объему тетраэдра, получим

$$\int dx \, dy \, dz = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1x_i & 1y_i & 1z_i \\ 1x_j & 1y_j & 1z_j \\ 1x_m & 1y_m & 1z_m \\ 1x_p & 1y_p & 1z_p \end{vmatrix} = V = \text{объем тетраэдра.}$$

Если порядок нумерации таков, как указано на рис. 35, то

$$\begin{aligned} \int x \, dx \, dy \, dz &= \int y \, dx \, dy \, dz = \int z \, dx \, dy \, dz = 0; \\ \int x^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{V}{20} (x_i^2 + x_j^2 + x_m^2 + x_p^2); \\ \int y^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{V}{20} (y_i^2 + y_j^2 + y_m^2 + y_p^2); \end{aligned}$$

$$\int z^2 dx dy dz = \frac{V}{20} (z_i^2 + z_j^2 + z_m^2 + z_p^2);$$

$$\int xy dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m + x_p y_p);$$

$$\int xz dx dy dz = \frac{V}{20} (x_i z_i + x_j z_j + x_m z_m + x_p z_p);$$

$$\int yz dx dy dz = \frac{V}{20} (y_i z_i + y_j z_j + y_m z_m + y_p z_p).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Численное интегрирование

1. Вступление

В программе, представленной в главе XV, не встречается трудностей при интегрировании, так как деформации постоянны. Действительно, там почти не встречается операций интегрирования, так как необходимо знать только площадь треугольника.

Для более сложных элементов используются функции полиномов более высокого порядка или функции формы¹, поэтому аналитическое интегрирование становится все более сложным, а иногда невозможным. Например, в треугольном изгибаемом элементе необходимо проинтегрировать члены до x^2 , xy , y^2 по площади для вычисления матрицы жесткости и члена до шестого порядка для согласованной матрицы массы в задачах колебаний. Для четырехугольников общего вида и кубичных элементов с узлами на серединах сторон необходимы значительные усилия при получении формулы интегрирования для различных членов. Очевидно, научные работники должны быть освобождены от таких затрат времени и повторных ручных действий для того, чтобы сосредоточиться на проблемах поиска более подходящих и точных элементов, улучшении решения больших систем алгебраических уравнений, исследовании теории сходимости конечных элементов и на различных других важных темах. Это можно сделать в случае, если численное интегрирование используется вместо аналитического.

Имеется много формул численного интегрирования; подробное описание их можно встретить у Корал [1].

В методике конечных элементов наиболее целесообразно использовать квадратичные формулы Гаусса и Ньютона — Котеса.

2. Квадратичные формулы Гаусса и Ньютона — Котеса

(а) Гауссовские формулы квадратуры, с помощью которых можно точно интегрировать полином $f(x)$ порядка $2n-1$ как взвешенную среднюю величину от частичных значений n его определенных точек, часто используются благодаря их высокой эффективности.

Определенный интеграл $\int_{-1}^1 f(x) dx$ заменяется суммой $\sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$, где H_j есть

¹ Функции формы будут непосредственно давать деформированную форму элементов, когда любой компонент узлового смещения взят как единица, а другие равны нулю. В этом отношении они отличаются от обобщенных полиномиальных функций.

весовые коэффициенты, $f(a_j)$ — значение функции в определенных точках a_j , а n есть число используемых точек. Величины H_j и a_j для n от 2 до 16 могут быть найдены в таблицах Корал [1]. Для удобства они приведены в конце этого приложения.

(б) Формулы квадратуры Ньютона — Котеса не столь сложны, но являются менее точными, так как с их помощью можно интегрировать полином $f(x)$ порядка n лишь в случае, если используются $n+1$ равнорасположенные точки.

Для $n=1$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1),$$

что является хорошо известным правилом трапеции.

Для $n=2$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \{f(-1) + 4f(0) + f(1)\},$$

и мы можем получить правило одной трети Симпсона. Для $n=3$ используем правило трех восьмых Симпсона

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{4} \left\{ f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) \right\}.$$

Коэффициенты для n от 2 до 20 также могут быть найдены в таблицах Корал.

3. Двумерные элементы

(а) *Четырехугольный элемент.* Функции формы для четырехугольных элементов обычно даются как функции координат ξ и η , так чтобы ξ и η принимали значения ± 1 на сторонах четырехугольника (рис. 103). Одна такая

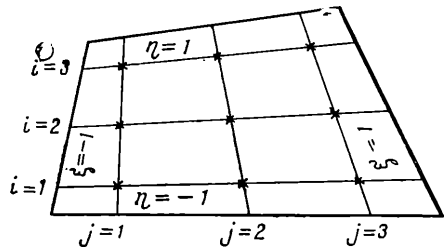


Рис. 103. Правило Гаусса 3×3 для четырехугольника общего вида

функция встречается в разделе 26. Так как пределы интегрирования для таких функций формы составляют ± 1 , они идеально соответствуют формуле квадратуры Гаусса.

Двойной интеграл

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

может быть прежде всего вычислен как внутренний интеграл, принимая η за постоянную, так что

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j, \eta) = \varphi(\eta).$$

Затем определяем внешний интеграл и получаем искомые результаты:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi(\eta) d\eta &= \sum_{i=1}^n H_i \psi(b_i) = \sum_{i=1}^n H_i \sum_{j=1}^n H_j f(a_j, b_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_j H_i f(a_j, b_i). \end{aligned}$$

Для трехчленного правила Гаусса формула интегрирования может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= H_1^2 f(a_1, b_1) + H_1 H_2 f(a_1, b_2) + H_1 H_3 f(a_1, b_3) + \\ &+ H_2 H_1 f(a_2, b_1) + H_2^2 f(a_2, b_2) + H_2 H_3 f(a_2, b_3) + \\ &+ H_3 H_1 f(a_3, b_1) + H_3 H_2 f(a_3, b_2) + H_3^2 f(a_3, b_3). \end{aligned}$$

Это даст возможность интегрировать $f(\xi, \eta)$ до пятой степени ξ и η без ошибок.

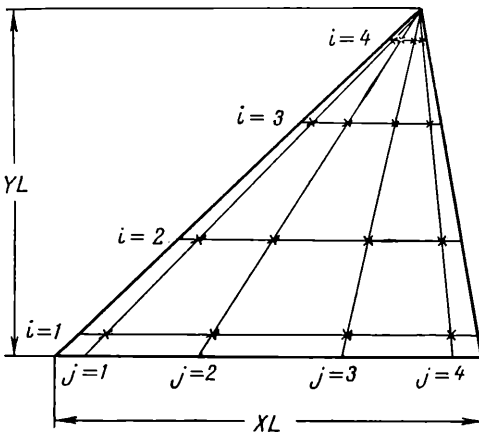


Рис. 104. Правила Гаусса при разбиении треугольника

(б) *Треугольные элементы.* Так как треугольник имеет только три стороны, лучше всего использовать правило квадратуры Гаусса сначала в направлении x

(параллельно основанию треугольника), а затем в направлении y . Сетка сначала наносится в треугольнике, как показано на рис. 104. В этом случае использовалось 4 точки в каждом направлении.

Площадь i -го участка, параллельного основанию, сначала вычисляется с помощью формулы в направлении x

$$AKEA_i = \frac{(XL)}{2} \frac{(1-a_i)}{2} \{0,3479f_{i1} + 0,6521f_{i2} + \\ + 0,6521f_{i3} + 0,3479f_{i4}\},$$

где f_{in} есть значения функции в точках вдоль прямой i , а положение прямой i определяется с помощью коэффициента a_i . Затем эта формула применяется к площади кусочков в направлении y , что дает значение двойного интеграла

$$\int \int f(x, y) dx dy = \frac{(YL)}{2} \{0,3479AKEA_1 + 0,6521AKEA_2 + \\ + 0,6521AKEA_3 + 0,3479AKEA_4\}.$$

Необходимо заметить, что для треугольников, у которых основание не параллельно главной оси x , интегрирование сначала производится в местных координатах, а затем полученная матрица жесткости преобразуется в главную систему координат.

Трехмерные элементы

Рассматриваемые здесь методы интегрирования могут распространяться на кубические элементы, для чего этот же процесс повторяется в направлении z . Этот метод успешно применялся по отношению к восьмиугольному бруску и тетраэдру (которые являются третьим аналогом прямоугольника и треугольника).

Абсциссы и весовые коэффициенты в квадратичной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Z. Kopal, Numerical Analysis, 2nd ed., Chapman & Hall, 1961.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Упрощенный способ вычисления собственных чисел

Для данного числа степеней свободы определение собственных чисел сопряжено с большими трудностями, чем решение статической задачи. Поэтому желательно ограничить степени свободы дискретной системы так, чтобы сделать решение экономичным.

Это можно сделать, например, разбив полный вектор смещения на две части

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (A.6.1)$$

и предположив, что смещение δ_j зависит единственным образом от смещения δ_i . Поэтому последняя величина получает название господствующей, а первая — подчиненной переменных.

Таким образом,

$$\{\delta_j\} = [L] \{\delta_i\} \quad (A.6.2)$$

и

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \{\delta_i\}, \quad (A.6.3)$$

где $[L]$ — матрица, определяющая зависимость.

Снова уравнение равновесия всей системы для задачи свободных колебаний, т. е.

$$[K] \{\delta\} + [M] \{\ddot{\delta}\} = 0, \quad (A.6.4)$$

может быть сокращено с помощью принципа минимума общей энергии.

Записывая энергию деформации для дискретной системы

$$\frac{1}{2} ([K] \{\delta\})^T \{\delta\} \quad (A.6.5)$$

и для потенциальной энергии, вызываемой инерционными нагрузками,

$$([M] \{\ddot{\delta}\})^T \{\delta\}, \quad (A.6.6)$$

мы можем минимизировать эту систему по отношению к господствующим смещениям $\{\delta_i\}$.

Используя правила дифференцирования, определенные в главе II, мы можем поэтому записать

$$\frac{\partial \{\delta\}}{\partial \{\delta_i\}} [K] \{\delta\} - \frac{\partial \{\delta\}}{\partial \{\delta_i\}} [M] \{\ddot{\delta}\} \quad (A.6.7)$$

и с помощью (A.6.3) получаем вместо (A.6.4)

$$[K'] \{\tau_i\} + [M'] \{\ddot{\delta}_i\} = 0, \quad (A.6.8)$$

в которой

$$[K'] = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \quad (A.6.9)$$

$$[M'] = \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}, \quad (A.6.10)$$

что теперь соответствует меньшему числу степеней свободы, связанных с $\{\delta_i\}$.

Задача теперь состоит в определении отношения между господствующим и подчиненным отклонениями. Целесообразным допущением, которое может быть вызвано инженерной интуицией, является допущение того, что общий характер деформации будет соответствовать схеме, которую мы получили бы, накладывая смещения $\{\delta_i\}$ на конструкцию, к которой не приложено других нагрузок.

Так, записав (аналогично уравнению (XIV.5))

$$[K] \{\delta\} = \begin{bmatrix} K_{ii}K_{ij} \\ K_{ji}K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix},$$

мы получаем

$$[K_{ji}] \{\delta_i\} + [K_{jj}] \{\delta_j\} = 0,$$

так как узлы j не погружены, а

$$\{\delta_j\} = -[K_{jj}]^{-1} [K_{ji}] \{\delta_i\},$$

или

$$[L] = -[K_{jj}]^{-1} [K_{ji}].$$

Использование таких экономических методов, несомненно, увеличит те стороны задачи, которые поддаются решению. Подробнее с этим методом можно ознакомиться в приведенной литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Irons, Eigenvalue Economisers in Vibration Problems, J. R. Ae. Soc., 67, no. 632, p. 526, 1963.
2. R. J. Guyan, Reduction of Stiffness and Mass Matrices, J.A.I.A.A., 3, no. 2, p. 380, 1965.
3. B. Irons, Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables. J.A.I.A.A., 3, no. 5, p. 961, 1965.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
От редактора	3
Предисловие	5
Глава I. Расчет жесткости сооружения	7
1. Вступление	7
2. Элемент конструкции	7
3. Объединение и расчет конструкции	11
4. Преобразование координат	14
5. Заключительные замечания	15
Список литературы	15
Глава II. Конечные элементы в континууме	16
6. Вступление	16
7. Прямая формулировка характеристик конечных элементов	17
8. Энергетический подход	23
9. Критерии сходимости	27
10. Функции смещения с разрывами между элементами	27
11. Границы решения	28
12. Расширение вариационного подхода	28
Приложение	29
Список литературы	30
Глава III. Плоское напряженное состояние и плоская деформация	31
13. Вступление	31
14. Характеристика элемента	31
15. Примеры. Оценка степени точности	40
16. Некоторые случаи практического использования	44
17. Особый случай плоской деформации для «несжимаемого материала»	52
Список литературы	52
Глава IV. Осесимметричное напряженное состояние	53
18. Вступление	53
19. Характеристики элемента	54
20. Некоторые иллюстративные примеры	63
21. Практические приложения	65
22. Несимметричное нагружение	68
Список литературы	68

<i>Глава</i>	V. Некоторые усовершенствования элементов в двумерных задачах	69
	23. Вступление	69
	24. Характеристики четырехугольных элементов, определенные с помощью треугольных элементов	69
	25. Выбор функции формы для прямоугольника	72
	26. Выбор функции формы для произвольного четырехугольника	73
	27. Треугольный элемент с шестью узлами	76
	28. Иллюстративный пример	78
	Список литературы	78
<i>Глава</i>	VI. Трехмерное напряженное состояние	80
	29. Вступление	80
	30. Характеристики тетраэдрального элемента	80
	31. Составные элементы с восемью узлами	86
	32. Улучшение функции смещения — прямоугольная призма	86
	33. Улучшение функции смещения — элемент с восемью произвольными узлами	87
	34. Тетраэдральный элемент с десятью узлами	89
	35. Общие замечания	90
	36. Некоторые примеры	90
	Список литературы	92
<i>Глава</i>	VII. Изгиб плит	93
	37. Вступление	93
	Несогласующиеся функции формы	94
	38. Прямоугольный элемент	94
	39. Треугольный элемент	105
	40. Четырехугольные элементы	112
	41. Примеры решений	113
	Согласующиеся формы функции	120
	42. Общие замечания	120
	43. Использование «корректирующих» функций	121
	44. «Корректирующие» функции для треугольного элемента	123
	45. Функции соответствия для четырехугольных элементов	124
	46. Некоторые примеры решения с согласующимися элементами	125
	47. Исследование сходимости несогласованных решений	127
	Список литературы	127
<i>Глава</i>	VIII. Оболочки как совокупность плоских элементов	129
	48. Вступление	129
	49. Жесткость плоского элемента в локальной системе координат	131

	Стр.
50. Преобразование к общей системе координат и объединение элементов	133
51. Локальные направляющие косинусы	135
52. Некоторые практические примеры	138
53. Сходимость	140
Список литературы	141
Глава IX. Осесимметричные оболочки	142
54. Вступление	142
55. Характеристики элемента — осесимметричные нагрузки	143
56. Несимметричные нагрузки	146
57. Примеры и точность	151
Список литературы	151
Глава X. Задачи теории поля — теплопроводность, фильтрация и т. п.	152
58. Вступление	152
59. Задачи на экстремум	153
60. Формулировка плоской задачи. Треугольные элементы	154
61. Формулировка плоской задачи. Четырехугольные элементы	160
62. Формулировка объемной задачи	161
63. Примеры. Оценка точности	162
64. Некоторые практические задачи	166
65. Задачи теории поля, зависящего от времени	172
Список литературы	175
Глава XI. Задачи на собственные значения — колебание и устойчивость	176
66. Вступление	176
Задачи колебаний	176
67. Задачи колебаний без затухания	176
68. Задачи колебаний с затуханием	186
69. Численные расчеты для случайного силового отклика	188
Задачи устойчивости	190
70. Изгиб плит с одновременным действием сил в плоскости	190
71. Задачи устойчивости плит	193
72. Некоторые матрицы жесткости «начального напряжения» для плит	193
73. Колебание растянутых или сжатых плит	196
74. Большие деформации и закритическое поведение плит при нагружении системой сил в плоскости	197
Список литературы	197
Глава XII. Нелинейные задачи — упругость, ползучесть и большие деформации	199
75. Вступление	199
76. Нелинейная упругость — прямой итерационный подход	199
77. Метод «приращение—начальная деформация» и решение упруго-пластических задач	202

	Стр.
78. Метод «приращение — переменная упругость»	206
79. Эффекты ползучести	208
80. Особый подход к некоторым вязко-упругим задачам	212
81. Нелинейность, возникающая в результате больших смещений	213
82. Решение задач устойчивости методом больших деформаций	217
83. Заключительные замечания	217
Список литературы	218
Глава XIII. Комбинированные задачи	219
84. Вступление	219
85. Плита, окаймленная балками	219
86. Плиты на упругом основании	221
87. Колебание конструкций, погруженных в жидкость	223
Список литературы	224
Приложение: 1. Матричная алгебра	225
2. Основные уравнения главы II	228
3. Некоторые формулы интегрирования для треугольника	229
4. Некоторые формулы интегрирования для тетраэдра	229
5. Численное интегрирование	230
6. Упрощенный способ вычисления собственных чисел	233

О. Зенкевич, И. Чанг

**Метод конечных элементов
в теории сооружений и в механике
сплошных сред**

Редактор издательства *Э. Н. Чернегова*
Переплет художника *О. В. Калаева*
Технический редактор *Н. В. Жидкова*
Корректор *Н. А. Соколова*

Сдано в набор 6/VI 1974 г.
Подписано в печать 17/IX 1974 г.
Формат 60×90^{1/16} Бумага № 1 Печ. л. 15,0
Уч.-изд. л. 15,5 Тираж 2600 экз.
Заказ № 1078/5192-9 Цена 1 р. 69 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12,
Третьяковский проезд, 1/19.
Московская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.